UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O raciocínio proporcional no quadro do pensamento algébrico: uma experiência de ensino no 6.º ano

Teresa Isabel Girardo Martins Garcez

Mestrado em Educação

Área da Especialidade Didática da Matemática

Trabalho de Projeto orientado pela

Professora Doutora Hélia Margarida Pintão de Oliveira

2016

Resumo

O presente estudo baseia-se no trabalho desenvolvido com uma turma de 6.º ano de escolaridade ao longo de um conjunto de 13 aulas, no ano letivo de 2014/2015. Foram elaboradas oito tarefas envolvendo sequências pictóricas e regularidades numéricas inseridas no domínio da Álgebra, contemplando os conteúdos Sequências e Regularidades e Proporcionalidade Direta. Pretende-se identificar as estratégias de generalização que os alunos utilizam, assim como as representações a que recorrem para exprimir essa generalização, e de que forma contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Analisa também o desenvolvimento do raciocínio proporcional com o objetivo perceber de que modo o trabalho com situações que envolvam sequências, regularidades e proporcionalidade direta, pode contribuir para o processo de generalização através de diferentes formas de representação.

Foi realizada uma análise de todas as resoluções escritas de cinco alunos selecionados da turma. A análise das estratégias de generalização e das representações foi orientada por um quadro de categorias previamente estabelecidas. A análise de aspetos centrais do raciocínio proporcional, nomeadamente, o reconhecimento da existência de proporcionalidade direta, da constante de proporcionalidade e do seu significado foi realizada indutivamente, tendo em conta uma análise preliminar dos dados.

Os resultados mostram que, mesmo antes do ensino formal do tema, os alunos são capazes de utilizar diferentes tipos de estratégias na resolução de tarefas envolvendo a proporcionalidade direta e conseguem desenvolver raciocínios funcionais, apoiados nas relações numéricas presentes. Os contextos das figuras mostraram-se fundamentais para apoiar os alunos a usar linguagem pré-simbólica e, gradualmente, a simbólica, ajudando a dar sentido às duas variáveis presentes em cada situação. De um modo geral, os alunos distinguiram situações em que existe proporcionalidade direta daquelas em que não existe, identificam a constante de proporcionalidade, no entanto, demonstram alguma dificuldade em lhe atribuir um significado de acordo com a situação.

Palavras-chave: Raciocínio proporcional, Pensamento Algébrico, Generalização, Representações, Sequências.

Abstract

The present study is based on the work developed in a 6th grade's class, during 13 lessons of the past school year. Eight tasks were performed by the students, involving pictorial sequences and numerical regularities, related to the algebra field, including the contents related to sequences and regularities, and direct proportionality. It aims to identify, not only the generalising strategies that students apply, but also the representations they use, in order to express that generalisation, and to understand how they contribute for the development of the algebraic thought. It analysis as well the development of the proportional reasoning, whose focus is to understand how tasks including sequences, regularities and direct proportionality can contribute to the generalising process through different ways of representation.

An analysis depending in five students' math problem solving was conducted. The analysis of the generalising strategies and representations was guided by a set of categories previously established. The analysis of several central items related to proportional thought, namely the recognition of direct proportionality, the principle of proportionality and its meaning was applied inductively, taking into account a preliminary data analysis.

Through the results, I can say that, before I teach this content, students are already able to use different strategies in order to solve tasks involving direct proportionality. The figure's context was essential because it helped students in their use of pre-symbolic language, and progressively, in the use of symbolic one, helping in providing meaning to both variables present in each situation. Students are also able to develop functional reasoning, from the present numerical relations. In general, students were able, not only to identify the existence (or not) of direct proportionality, but also the constant of proportionality. Nevertheless, they show some difficulties in giving it a meaning, according to its situation.

Keywords: Proportional Reasoning, Algebraic Thinking, Generalisation, Representations, Sequences.

Agradecimentos

Desde o início dos trabalhos de mestrado, contei com o apoio e a confiança de várias pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização desta aventura e às quais agradeço, reconhecida. Pelo papel particularmente relevante que desempenharam, gostaria de agradecer de modo especial a algumas delas…

Em primeiro lugar, quero deixar uma palavra de reconhecimento à minha orientadora, a Professora Doutora Hélia Margarida Pintão de Oliveira, pela sua disponibilidade, exigência, paciência, incentivo, carinho e apoio constante ao longo deste projeto … um Muito Obrigada, Professora!

Uma palavra de gratidão aos meus alunos pela disponibilidade, entusiasmo e empenho que demonstraram durante o desenvolvimento da unidade de ensino. Sem eles não teria sido possível concretizar este estudo.

À direção e aos restantes colegas da escola onde se realizou este estudo, pela disponibilidade e apoio dado, facilitando e tornando possível a realização deste projeto.

Aos meus familiares e amigos, a todos aqueles que direta ou indiretamente estiveram a meu lado e contribuíram para a realização deste trabalho, pelo apoio, carinho, palavras de incentivo e ânimo nos momentos mais difíceis e pela compreensão nos momentos de ausência.

Aos meus filhos Afonso e Guilherme, a quem dediquei menos tempo nestes últimos dois anos e meio, mas os quais estiveram sempre no meu pensamento.

À minha mãe, Filomena, à minha irmã Sílvia, pois sem elas nada disto tinha sido possível. O seu constante apoio, incentivo, motivação, carinho, persistência, pressão, proteção, amparo e amor foi fundamental para que eu conseguisse iniciar e concluir esta importante etapa da minha vida. Ao meu companheiro de jornada que nunca permitiu que desistisse deste meu sonho. Obrigado.

A todos o meu muito obrigado…

Índice

Índice de Quadros

Índice de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo começo por apresentar as motivações para a realização do presente trabalho e indico o respetivo contexto e pertinência. Posteriormente é definido o objetivo que se pretende atingir, bem como as questões que orientam a investigação. Por fim, é feita uma síntese da estrutura organizativa do trabalho.

1.1. Pertinência do estudo

Tal como o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), o programa atual apresenta o tópico proporcionalidade direta no tema Álgebra, desta forma senti a necessidade de perceber de que forma o desenvolvimento das ideias algébricas, associadas aos processos de generalização, pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos.

Assim, pretendo com este Trabalho de Projeto, desenvolver uma experiência de ensino de cunho exploratório que apoie os alunos na compreensão que uma relação de proporcionalidade direta envolve relações de covariação e invariância, ideias algébricas associadas à capacidade de raciocínio proporcional.

O raciocínio proporcional é utilizado por todos – incluindo os próprios alunos – em inúmeras situações do dia-a-dia, uma vez que muitos fenómenos do mundo real podem ser descritos através do modelo da proporcionalidade. Por isso, o desenvolvimento desta capacidade de raciocínio é extremamente útil na interpretação de situações da vida quotidiana e na resolução de problemas de muitas áreas do saber (Cramer, Post & Behr, 1989). O desenvolvimento do raciocínio proporcional é essencial na passagem do estádio das operações concretas para o das operações formais constituindo um alicerce curricular fundamental para outros conhecimentos matematicamente, como por exemplo, a Álgebra. Na verdade, ao longo da minha experiência docente tenho constatado que os meus alunos do 6.º ano de escolaridade apresentam dificuldades em lidar com problemas de proporcionalidade direta. Muitos não conseguem distinguir as situações de proporcionalidade direta das que não o são. Tenho notado também uma tendência geral para mecanizarem algoritmos sem os compreender e, de seguida, aplicarem-nos mesmo em situações que não são de proporcionalidade. Outra questão que me tem preocupado é o facto de os alunos terem a tendência de não relacionar as tarefas escolares com as que se deparam fora da escola. Ou seja, em situações do seu dia-a-dia, fazem uma aplicação de estratégias intuitivas, mas na escola, tendem a aplicar estratégias mais formais, sem terem, muitas das vezes, a sua compreensão plena, aplicando-as quando não devem, ou aplicando-as mal, sem recorrer ao seu conhecimento intuitivo e errando com frequência as tarefas solicitadas. Isto é percetível aquando na realização de tarefas oiço desabafos "O que é que é para fazer?" ou "Não percebo nada disto", no entanto, em situações similares do seu quotidiano, são completamente autónomos como, por exemplo, na escolha da melhor compra, quando vão ao supermercado.

Deste modo, enquanto professora do 2.º ciclo do ensino básico, penso ser pertinente e relevante aprofundar o meu conhecimento sobre a natureza e a origem destas dificuldades dos alunos. Também verifico que, propor tarefas que sejam consideradas estimulantes para os alunos nestas idades não é fácil. A sua escolha é essencial e pode ser o que solidifica ou quebra o elo que liga o aluno à aula de Matemática. Por outro lado, o professor tem de ter em conta também a adequabilidade das próprias tarefas, o que é bastante complicado de avaliar. O facto de não haver um conjunto de "tarefas ideais" faz com que a diversidade seja uma estratégia com boa probabilidade de sucesso. Assim, o professor tem de ter em conta que, para além de não se poder limitar o raciocínio proporcional a determinado tipo de tarefas, também é impossível limitá-lo a uma unidade. Além disso, tendo em conta toda a sua riqueza e utilidade para outras disciplinas e no quotidiano dos alunos, o ensino da proporcionalidade não deve ser limitado apenas à disciplina de Matemática.

Muito se tem discutido sobre a origem das dificuldades dos alunos ao resolverem problemas que envolvem raciocínio proporcional, sem certezas de como as evitar. O que se pretende, no entanto, é que todos os alunos consigam ultrapassar estas dificuldades e obter sucesso na aprendizagem deste tema.

O tema da proporcionalidade é, sem dúvida, um dos que se revelam mais difíceis para os alunos do ensino básico. A sensação com que se fica quando se termina este conteúdo é de que apesar de muito se aplicar e resolver tarefas que envolvam o raciocínio proporcional, este pode não ter sido desenvolvido tanto quanto se pretendia. Deste modo, este tema requer ainda muita investigação para que o professor saiba como o facilitar e promover nos seus alunos este tipo de raciocínio. Para tal é pertinente pensar que muito há a investigar, no sentido de melhor perceber quais as dificuldades sentidas pelos alunos quando se deparam com tarefas que apelam ao raciocínio proporcional.

1.2. Objetivo e questões do estudo

Para Lesh, Post e Behr (1988), o desenvolvimento do raciocínio proporcional constitui um dos principais objetivos do ensino da Matemática elementar. O propósito de ensino deve passar pela mobilização das estratégias intuitivas dos alunos, que tipicamente são aditivas (Hart, 1981) e orientá-los para a construção de estruturas multiplicativas (Clark & Kamii, 1996). Da minha experiência como professora, os alunos do 6.º ano manifestam dificuldades na realização de tarefas matemáticas. A primeira dificuldade é transversal e diz respeito à capacidade de resolução de problemas, motivada por: (i) falta de domínio da língua materna; (ii) desconhecimento das situações contextuais dos fenómenos (físicos e outros); e (iii) não estabelecimento de relações com a sua experiência pessoal. A segunda dificuldade está associada a um conhecimento pobre sobre estruturas multiplicativas. A terceira grande dificuldade refere-se à sua tendência para a realização de procedimentos matemáticos sem os compreender, isto é, os alunos estão mais preocupados com o produto final do que com o significado desse produto. Deste modo, será importante proporcionar aos alunos do 6.º ano de escolaridade, como parte daquilo a que podemos chamar a iniciação ao pensamento algébrico, experiências de aprendizagem que visem o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Para isso, o trabalho na aula deve envolver os alunos em tarefas que lhes permitam partir das suas conceções e experiências para a construção do saber matemático, usando um conjunto de ferramentas que sustentem a construção de conhecimentos significativos.

Este projeto tem como objetivo articular dois tópicos do Programa de Matemática Ensino Básico (MEC, 2013) – *Sequências e Regularidades* e *Proporcionalidade direta* – no quadro de uma experiência de ensino, numa turma do sexto ano de escolaridade, com vista à promoção do pensamento algébrico dos alunos. A experiência de ensino organiza-se em torno de tarefas matemáticas que incidem, numa primeira fase, sobre sequências e, numa segunda fase, sobre situações de proporcionalidade direta ou de confronto de situações de proporcionalidade direta e outras.

No âmbito deste projeto, desenvolveu-se um estudo em que se pretende compreender como esta unidade de ensino contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, em duas vertentes: as estratégias de generalização usadas pelos alunos e o raciocínio proporcional. Para atingir este objetivo, delinearam-se as seguintes questões de estudo, organizadas segundo os contextos das tarefas propostas na unidade de ensino:

(A) No contexto da realização de tarefas com sequências crescentes pictóricas:

- A que estratégias de generalização recorrem os alunos na resolução das tarefas?
- Como exprimem os alunos a generalização, nesse contexto?

(B) No contexto da realização de tarefas envolvendo a proporcionalidade direta:

- Como distinguem os alunos as situações de proporcionalidade direta das que não são?
- Que sentido atribuem os alunos à constante de proporcionalidade?
- Como exprimem os alunos a generalização, nesse contexto?
- Que reflexos do trabalho em torno das sequências pictóricas se evidenciam neste contexto?

Lamon (2005) sugere que cerca de 90% dos adultos não conseguem raciocinar proporcionalmente, compensando a sua falta de compreensão com o uso de regras. Deste modo, a investigação nesta área é importante para que o professor saiba como facilitar e promover, nos seus alunos, o raciocínio proporcional. É assim pertinente perceber quais as dificuldades sentidas pelos alunos e o que as origina. Spinillo (1994) levanta também uma questão interessante, ao se aperceber que as crianças desde cedo revelam ter noções sobre proporções, mas, mais tarde, na escola apresentam muitas dificuldades na aprendizagem deste conteúdo. A autora indica que este facto constata-se porque o ensino ou apresenta uma continuidade acentuada, onde o conhecimento novo é tão semelhante ao antigo que nada lhe acrescenta em termos cognitivos, ou então pela rutura acentuada entre o conhecimento antigo e o conhecimento novo, o que torna impossível o estabelecimento de pontes. Assim, esta continuidade e/ou descontinuidade deve ser tida em consideração na preparação das tarefas desenvolvidas na sala de aula.

1.3. Estrutura do trabalho

Este relatório está organizado em duas partes. A primeira, da qual fazem parte os capítulos 1 a 3. A seguir ao presente capítulo, de introdução, o segundo capítulo apresenta o quadro de referência teórico utilizado, as orientações curriculares sobre o ensino do raciocínio proporcional, Álgebra e Pensamento Algébrico. Por sua vez, o capítulo 3 apresenta a unidade de ensino, descrevendo as estratégias de ensino, as tarefas e a sua concretização em sala de aula. A segunda parte inclui os capítulos 4 a 6, que constituem a vertente empírica do estudo. O capítulo 4 apresenta a metodologia de investigação fazendo referência aos métodos de recolha e processo de análise de dados. O capítulo 5 descreve brevemente as aulas com cada tarefa e apresenta o percurso de aprendizagem de cinco alunos, de acordo com as questões de estudo. Finalmente, as conclusões do estudo e uma reflexão global são apresentadas no capítulo 6.

Capítulo 2

Enquadramento Curricular e Didático

2.1. Álgebra e Pensamento Algébrico

Neste capítulo apresento, numa primeira parte, conceções de álgebra e pensamento algébrico segundo várias referências teóricas e, em seguida, a pertinência da sua implementação nos primeiros anos de escolaridade, nomeadamente no 2.º ciclo o qual leciono.

2.1.1 A Álgebra e o Pensamento algébrico – perspetivas

> "O aluno competente algebricamente percebe a relação existente entre objetos e consegue raciocinar sobre essas relações de uma forma geral e abstrata."
>
> (Ponte, 2006).

> "Um aluno que não consiga fazer conexões e que não entenda essas relações é forçado a "decorar" regras algébricas sem nunca as conseguir justificar."
>
> (Lannin, 2004).

Quando se fala em Álgebra, nos anos iniciais, esta aparece, frequentemente, associada a uma perspetiva de desenvolvimento do pensamento algébrico. É assim pertinente perceber-se de que forma estes dois conceitos se interligam. A Álgebra generaliza ideias da Aritmética, onde valores desconhecidos e variáveis podem ser encontrados para resolver problemas (Taylor-Cox, 2003). Em particular, Blanton e Kaput (2005) caracterizam o pensamento algébrico como um processo através do qual "os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (p. 413, citado em Mestre, 2014).

A perspetiva da Álgebra escolar desde os primeiros anos – *Early Algebra* – que defende que os alunos deverão desenvolver o pensamento algébrico, para além do numérico, desde o primeiro ciclo, estando a aprendizagem de conceitos associada à compreensão e não somente à memorização de procedimentos treinados é também salientada por Ponte, Branco e Matos (2009). Segundo estes autores, o pensamento algébrico diz respeito à simbolização (representar e analisar situações matemáticas, usando símbolos algébricos), ao estudo de estruturas (compreender relações e funções) e à modelação. Implica conhecer, compreender e usar os instrumentos simbólicos para representar o problema matematicamente, aplicar procedimentos formais para obter um resultado e poder interpretar e avaliar esse resultado. O pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com o cálculo algébrico, as funções, as estruturas matemáticas, e o seu uso na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios, bem como com a manipulação de símbolos, na descrição de situações e na resolução de problemas.

A passagem da Aritmética para a Álgebra é, pois, uma das grandes dificuldades dos alunos no seu percurso escolar na Matemática, como tal os professores devem diversificar estratégias permitindo, aos seus alunos, desenvolver de forma gradual o pensamento algébrico e o sentido de símbolo (Arcavi, 2006). Barbosa e Borralho (2009) referem que para Arcavi (2006), o principal instrumento da Álgebra é o símbolo e que pensar algebricamente consiste em usar os instrumentos simbólicos para representar o problema de forma geral, aplicar procedimentos formais para obter um resultado, e poder interpretar esse resultado.

No entanto, a introdução das variáveis é muitas vezes confusa e, em muitos casos, descontextualizada (Barbosa & Borralho, 2009). Para os alunos que estão apenas habituados ao pensamento concreto no seu percurso escolar, as variáveis podem ser demasiado abstratas e complexas, dado assumirem vários sentidos e valores.

Pode afirmar-se que a utilização de atividades que envolvam o estudo de padrões e regularidades são um dos caminhos privilegiados para desenvolver o pensamento algébrico. Os padrões ajudam, os alunos, a perceber a "verdadeira" noção de variável, que para a maioria é apenas vista como um número desconhecido (Barbosa & Borralho, 2009).

A investigação sobre pensamento algébrico tem valorizado formas de representação que vão muito para além das representações algébricas simbólicas. Aliás, Carraher e Schliemann (2007) afirmam que inclusivamente o próprio sentido daquilo que pode ser considerado um símbolo algébrico tem vindo a ser ampliado, englobando a notação aritmética, pois esta inclui símbolos que representam noções abstratas e até relações. Para além da notação aritmética e algébrica, existem mais três sistemas simbólicos que são reconhecidos como fundamentais, por estes autores: as tabelas, as representações gráficas e a linguagem natural. Há, ainda, outras formas de representação menos convencionais, como objetos, estruturas ou processos que suportam e facilitam a expressão do pensamento algébrico dos alunos (Mestre, 2014). Entre eles estão artefactos visuais ou concretos como retas numéricas, diagramas, gráficos de linha — objetos que se tornam referências e em torno dos quais os alunos podem pensar algebricamente.

2.1.2. A Álgebra e o pensamento algébrico nas orientações curriculares

Nos últimos anos, tem-se assistido a um movimento que defende a integração do pensamento algébrico na Matemática escolar desde o seu início. Frequentemente a Álgebra constituiu um domínio à parte, isolado dos outros temas do currículo de Matemática, e também, dos interesses dos alunos, que tendem a não lhe reconhecer valor. Como afirma Kaput: "A Álgebra escolar tem tradicionalmente sido ensinada e aprendida como um conjunto de procedimentos desligados quer dos outros conteúdos matemáticos, quer do mundo real dos alunos" (1999, p. 2).

No Programa de Matemática para o Ensino Básico (PMEB) homologado em 2007, verificou-se uma valorização da Álgebra desde os primeiros anos, considerando os seus autores que a alteração mais significativa em relação ao programa anterior a este consistiu no "estabelecimento de um percurso de aprendizagem prévio no 1.º e 2.º ciclos que possibilite um maior sucesso na aprendizagem posterior, com a consideração da Álgebra como forma de pensamento matemático, desde os primeiros anos" (Ponte et al., 2007, p.7). Embora no 1.º ciclo não surja o tema Álgebra identificado como tal, no entanto, considerava-se nesse programa que as ideias algébricas poderiam ser introduzidas no 1.º ciclo, através, por exemplo, do estabelecimento de relações entre números e entre os números e as operações e através das sequências (Oliveira 2009). No 2.º ciclo a Álgebra já aparecia como um tema independente, nesse programa.

Assim, os alunos no 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas e padrões geométricos. No 2.º ciclo, ampliam e aprofundam esse trabalho, explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma expressão geradora pelo estudo da relação entre os termos e as ordens. No 1.º ciclo trabalhava-se com as estruturas multiplicativas e com os números racionais, o que constitui uma base para o desenvolvimento da noção de proporcionalidade. No 2.º ciclo, este assunto era aprofundado e sistematizado através da exploração de múltiplas situações que envolvem os conceitos de proporcionalidade direta, razão e proporção (Ponte et al., 2007, p.40).

Também o documento *Princípios e Normas* (NCTM, 2000) considera que os programas de ensino da matemática escolar desde o pré-escolar até ao 12.º ano devem habilitar os alunos para desenvolver as capacidades de:

- compreender padrões, relações e funções;
- representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- analisar a variação em diversos contextos.

Ainda neste documento é referido que os alunos da escola elementar beneficiam em realizar investigações e comunicarem experiências que envolvam o raciocínio algébrico por permitirem uma compreensão matemática avançada, sendo este, para além disso, suporte de aprendizagens posteriores mais formalizadas. Recomenda assim a introdução das letras nos 3.º ao 5.º anos, sugerindo-se a representação da noção de variável, enquanto quantidade desconhecida, através de uma letra ou símbolo, ou a expressão de relações matemáticas através de equações. Alguns investigadores no campo do ensino da matemática têm vindo a evidenciar vantagens para os alunos do 1.º ciclo, de utilizarem as letras quando introduzidas com naturalidade e no contexto de problemas como abreviaturas dos elementos em jogo ou para representar quantidades indefinidas (Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2008; Mestre 2014).

Verifica-se que no novo Programa de Matemática do Ensino Básico PMEB (MEC, 2013) o tópico Sequências e Regularidades surge no 2.°ano, onde se indica que os alunos devem "resolver problemas envolvendo a determinação de termos de uma sequência, dada a lei de formação" e também "envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com a sequência parcialmente conhecida" (p. 11). No entanto, este tópico está ausente do programa nos anos subsequentes do primeiro ciclo. Esta ausência cria uma descontinuidade de trabalho, pois o referido item surge depois apenas no sexto ano. Veloso, Brunheira e Rodrigues (2013) encaram com preocupação esta situação, pois para as autoras se um dos grandes objetivos do estudo da Álgebra, no currículo escolar, é o de desenvolver nos alunos o seu pensamento algébrico, e sendo a generalização e a formalização de padrões, um dos seus aspetos essenciais, em nada é favorável esta descontinuidade. Estas autoras consideram que "o estudo das relações, designadamente as relações funcionais, e a modelação na descrição de fenómenos ou situações devem ser feitos desde o primeiro ciclo, partindo duma abordagem informal, e necessariamente ancorada na linguagem natural e na ênfase na semântica, e progressivamente ir evoluindo para a adoção de abordagens mais abstratas e formais.".

2.2. Pensamento algébrico - à procura de generalizações

2.2.1. A generalização - perspetivas sobre o processo de generalização

O foco do pensamento algébrico está na atividade de generalizar, como tal a capacidade de generalização e a representação dessa generalização são aspetos relevantes em todo o processo de raciocínio matemático e no desenvolvimento do pensamento algébrico (Mestre, 2014). A generalização é considerada um processo que se desenvolve a partir da análise de casos particulares e que, após identificação de caraterísticas comuns, evolui para uma regra geral (Mateus, 2013). A autora refere ainda que a generalização é definida como uma atividade onde as pessoas, num contexto socio matemático específico, se envolvem em pelo menos uma de três ações: a) identificam o que é comum entre casos; b) estendem o seu raciocínio para além dos casos particulares; ou c) derivam resultados mais amplos através dos casos particulares. Para Mestre e Oliveira (2012) a generalização é uma capacidade que pode ser construída coletivamente nos anos iniciais, resultante de debates na turma, onde os alunos têm um papel ativo ao partilharem e explicarem as suas próprias ideias, como também na compreensão dos raciocínios dos outros.

Barbosa (2009) salienta que relativamente às sequências, Stacey (1989) propõe dois tipos de generalização, tendo em conta as estratégias utilizadas para generalizar situações: a generalização próxima e a generalização distante. Na generalização próxima os termos são determinados recorrendo à contagem ou a desenhos e na distante são utilizadas estratégias que implicam a construção de uma regra geral. Refere também que Dörfler (2008) associa à generalização uma representação, referindo que não é possível pensar em generalização sem utilizar uma representação. E por último, indica que para Polya (1965) a generalização não é um processo imediato mas sim gradual que começa com tentativas, um esforço para tentar entender os factos observados, para fazer analogias e testar casos especiais. O NCTM (2000) refere a importância de encorajar os alunos a representarem as suas ideias sob formas que não sejam convencionais (mas que façam sentido para eles) como também convencionais, de modo a facilitar quer a sua aprendizagem da matemática, quer a comunicação das suas ideias matemáticas a outros.

Reconhecer situações, descrevê-las e expressá-las são os primeiros passos para a generalização na matemática. É da responsabilidade do professor trabalhar e fornecer aos alunos ferramentas necessárias para o desenvolvimento de estratégias que facilitem o processo para chegarem a tais generalizações. Este deve estar sensibilizado na promoção do desenvolvimento da capacidade de generalizar, nos seus alunos. Como tal, é de extrema importância que o professor consiga identificar as dificuldades dos alunos no processo de generaliz

2.2.2. Estratégias de generalização

Barbosa (2009) salienta que relativamente à utilização de diferentes tipos de estratégias de generalização, a literatura refere que os alunos tendencialmente generalizam de forma recursiva, em vez de procurarem estabelecer uma relação entre as variáveis dependente e independente. Os alunos, uma vez utilizando uma estratégia recursiva na tentativa de generalizar, apresentam geralmente relutância em descobrir uma relação funcional.

Barbosa (2009) refere ainda que os autores García-Cruz e Martinón (1997) apontam o importante papel que a visualização pode desempenhar na generalização. Estes últimos autores classificaram as estratégias de generalização em:

- Estratégia de natureza visual, se a figura desempenhar um papel essencial na descoberta do invariante, representando o contexto onde se desenrolam as ações;
- Estratégia numérica, se assenta nas propriedades e relações dos números e está subjacente ao raciocínio;
- Estratégia mista, nos casos em que os alunos usaram a sequência numérica para generalizar, recorrendo posteriormente à figura para validar o seu raciocínio.

Após estudaram as estratégias utilizadas por alunos do 9.º ano na tentativa de generalizar padrões lineares e tendo por base a natureza da abordagem na generalização, Becker e Rivera (2005) classificam-nas em três formas distintas:

- Generalização numérica: os alunos aplicaram normalmente a tentativa e erro e não demonstraram ter conhecimento do significado dos coeficientes no padrão linear.
- Generalização figurativa: Focaram a sua atenção nas relações entre os números da sequência e mostraram-se capazes de analisar as variáveis dentro do contexto de uma relação funcional.

- Generalização pragmática: Incluíram os dois tipos de estratégias, numéricas e figurativas, mostrando flexibilidade no raciocínio, e viram nas sequências de números, simultaneamente, propriedades e relações.

Mateus (2013) destaca três níveis de generalização assinalados por Radford (2006). Estes níveis de generalização variam entre a indução simples, a generalização aritmética e a generalização algébrica, esta última estratificada em factual, contextual e simbólica. A indutiva, não relacionada com o processo de generalização, é baseada na tentativa e erro ou noutras estratégias de adivinhação, sem a identificação de regularidades. Em relação à estratégia aritmética, esta permite a construção de termos de sequências recorrendo a um aspeto comum, sem recorrer a uma regra. A estratégia algébrica divide-se em três níveis de generalização: factual, refere-se ao nível do concreto, baseado em ações realizadas nos números e em casos particulares e, sem atribuir um valor à ordem quando se determina termos de ordens mais distantes; contextual, quando já é utilizada a referência ao número da figura e a descrição da generalização é realizada com recurso ao contexto, o que ocorre com frequência no caso das sequências figurativas; e simbólico, quando a generalização é expressa a partir de linguagem algébrica (Mateus, 2013). Barbosa (2009, 2013), por sua vez, propõe não três mais sim cinco tipos estratégias de generalização, que dizem respeito, não só, à determinação de termos próximos ou distantes de uma sequência, como também, à formulação explícita de uma regra geral, ou seja, à indicação da expressão geradora da sequência ou expressão algébrica de uma situação de proporcionalidade direta, ainda que recorrendo a representações diversas (Quadro 1).

Quadro 1 - Categorização das estratégias de generalização (Barbosa, 2009, p.447)

Estratégia		**Descrição**
Contagem		Desenhar uma figura e contar os seus elementos.
Termo unidade	Sem ajuste	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.
Diferença	Recursiva	Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.
	Múltiplo da diferença sem ajuste	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ajustar o resultado.
	Múltiplo da diferença com ajuste	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo. É feito um ajuste do resultado.
Explícita		Descobrir uma regra, com base o contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente correspondente.
Tentativa e erro		Adivinhar uma regra fazendo sucessivas tentativas com diferentes valores. Conhecida uma regra, experimentar sucessivos valores até que sejam verificadas as condições pretendidas.

Esta subdivisão das categorias tem em conta não só a natureza das estratégias – níveis diferentes de complexidade em termos da capacidade de generalização – como também o tipo de questões das tarefas que os alunos resolveram.

Pedro (2013) baseia-se na categorização das estratégias de Barbosa (2013), no entanto, a partir de uma primeira análise das estratégias dos alunos no seu estudo, sentiu necessidade de ajustar a categorização das estratégias de generalização incluindo novas categorias que aglutinassem as estratégias identificadas no seu trabalho (Quadro 2) e que não estavam contempladas nas estratégias de Barbosa. Considerou subdivisões dentro da categoria da estratégia explícita, como também acrescentou duas novas categorias para a determinação de termos próximos ou distantes de uma sequência: *Adição de Termos* e *Funcional*, esta última com duas subcategorias. Para a formulação de uma Regra Geral Explícita, Pedro (2013) considera não uma categoria como Barbosa (2009), mas sim quatro subcategorias.

Quadro 2 - Estratégias de generalização propostas por Pedro (2013, pp. 35-36)

Estratégia		**Descrição**
Contagem (C)		Desenhar figuras e contar os seus elementos.
Adição de termos (AT)		Obter um termo a partir da adição de outros termos.
Termo unidade	Sem ajuste (TU_1)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico (TU_2)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual (TU_3)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.
Regra geral Explícita	Diferença sem ajuste (ED_1)	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo para obter uma regra geral, sem ajustar o resultado.
	Diferença com ajuste (ED_2)	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo para obter uma regra geral, com ajuste.
	Raciocínio Funcional (EFCF)	Usar o contexto da figura para obter uma regra geral.
	Raciocínio Funcional (EFCN)	Usar o contexto numérico para obter uma regra geral.
Tentativa e erro (TE)		Adivinhar uma regra fazendo sucessivas tentativas com diferentes valores. Conhecida uma regra, experimentar sucessivos valores até que sejam verificadas as condições pretendidas.

Para classificar as estratégias de generalização das resoluções de questões de raciocínio inverso (é dado o termo da sequência e é solicitada a determinação da ordem, ou quando tem de se averiguar se determinado valor é termo da sequência).

Quadro 3 - Estratégias de generalização propostas por Pedro (2013, pp. 37-38) no raciocínio inverso

Diferença	Recursiva (D_1)	Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.
	Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ajustar o resultado.
	Múltiplo da diferença com ajuste (D_3)	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo. É feito um ajuste do resultado.
Exclusão	Características da figura (ECF)	Usar as características das figuras da sequência para verificar que determinado valor não é um termo.
	Características dos números (ECN)	Usar as características dos números da sequência para verificar que determinado valor não é um termo.
Explícita	Tentativa e erro a partir de uma regra (ETE)	Usar uma regra geral que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente e, por experimentação, verificar se um valor é termo da sequência.
	Por exaustão a partir de uma regra (EE)	Usar uma regra geral que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente e, por exaustão, verificar se um valor é termo da sequência.
	Operação inversa (EOI)	Usar operações inversas para verificar se um valor é termo da sequência, a partir de uma regra geral que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente.

Estratégia		**Descrição**
Contagem (C)		Desenhar figuras e contar os seus elementos.
Adição de termos (AT)		Obter um termo a partir da adição de outros termos.
Termo unidade	Sem ajuste (TU_1)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico (TU_2)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual (TU_3)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.

Lannin, Barker e Townsend (2006) identificaram um conjunto de fatores que podem influenciar de forma significativa a utilização das estratégias de generalização. Segundo estes autores, existem três tipos de factores: os sociais, que resultam das interações do aluno com os seus pares e com o professor; os cognitivos, que estão associados às estruturas mentais que o aluno desenvolveu; e por último, os estruturais associados à estrutura da tarefa. Por exemplo, segundo Barbosa (2009) os alunos não utilizam uma linguagem apropriada para descrever a relação, e têm tendência para usar uma estratégia recursiva em qualquer tipo de generalização. Revelam também incapacidade de visualizar ou completar os padrões e utilizam a tentativa e erro em vez da generalização algébrica.

2.3. O Raciocínio Proporcional

Nesta secção apresento a revisão da literatura sobre os vários aspetos que envolvem o raciocínio proporcional. Inicialmente apresento alguns aspetos que envolvem este tipo de raciocínio e o seu desenvolvimento. Faço referência à natureza das tarefas, a estratégias e dificuldades dos alunos na resolução das tarefas.

2.3.1. Aspetos envolvidos no raciocínio proporcional

O conceito de raciocínio proporcional está associado à capacidade de analisar de forma consciente as relações entre quantidades, indo muito além da mecanização de estratégias formais de resolução de problemas de proporcionalidade direta. Silvestre (2012) refere que para Lamon (2005) a compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade só é possível se o indivíduo revelar raciocínio proporcional e, este reflete a capacidade de compreensão e justificação de afirmações sobre as relações entre quatro quantidades, onde se verifiquem relações de covariância de quantidades e invariância de razões ou produtos. Essa compreensão pressupõe a capacidade de perceber que, na equivalência entre razões, há algo que muda na mesma proporção (quantidades absolutas) e que, ao mesmo tempo, há algo que se mantém constante (a proporção). A autora acaba por considerar que uma deficiente compreensão da natureza multiplicativa das situações proporcionais pode estar na origem de muitas das dificuldades na mobilização do raciocínio proporcional nas situações propostas aos alunos. Silvestre e Ponte (2012), baseando-se nas perspetivas de diversos autores, sugerem que o raciocínio proporcional envolve:

- A capacidade para distinguir situações de proporcionalidade direta de situações que não o são;
- A compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais;
- A capacidade para resolver vários de tipos de problemas, revelando a facilidade mental para resolver diferentes situações de proporcionalidade, sem ser influenciado pelo contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e as representações (texto, gráficos, tabelas, razões).

A literatura aponta basicamente duas perspetivas sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional – uma indica-o como sendo tardio e outra defende que se desenvolve desde os primeiros anos da infância. Silvestre (2012) refere que os autores Falk e Wilkening (1998) reconhecem que os alunos com idade inferior a 13 anos são incapazes de perspetivar usando proporções num problema que apresenta um conjunto bolas brancas e pretas depositadas num recipiente. Só os alunos com 13 anos utilizaram raciocínio proporcional na resolução deste problema. Silvestre (2012) revela ainda que nos estudos desenvolvidos por Singer-Freeman e Goswami (2001) e Sophian e Wood (1997) é referido precisamente o contrário, pois crianças de 3 e 7 anos de idade resolveram corretamente problemas sobre proporções, que envolvem a relação de parte:todo.

Assim surge a necessidade de analisar os conceitos raciocínio proporcional e proporcionalidade, investigando que significados podem ter, assim como se relacionam. O raciocínio proporcional tem sido investigado por muitos autores na tentativa de descrever e explicar algo de bastante complexo ao nível do pensamento matemático. Post, Behr e Lesh, (1988) revelam que a maioria das pessoas que resolvem problemas sobre proporções poderão não estar a usar o raciocínio proporcional. Por exemplo, para resolver proporções do tipo $A/B = X/C$, as pessoas em geral e, particularmente os alunos, recorrem com demasiada frequência à Regra de Três simples ($x = (A \times C)/B$), sendo este método facilitador, mas mal compreendido pelos alunos, não contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

O conceito de razão entre duas grandezas é, pois, fundamental para o desenvolvimento do pensamento proporcional. Costa (2007) refere que Spinillo (2003) apresenta um exemplo de crianças que julgam que um jarro com 4 copos de sumo concentrado e 2 copos de água tem um sabor mais forte que um jarro com 2 copos de sumo concentrado e 1 copo de água. Só mais tarde, começam a revelar sinais de pensamento proporcional, quando percebem que o sabor em ambos as misturas não é diferente. Assim, não só o conceito de razão, como também a equivalência de duas razões, é importante na compreensão das proporções. Outros autores também assinalam alguns pré-requisitos, ou seja, condições essenciais de pensamento, para que exista raciocínio proporcional. Por exemplo, Lamon (1993) considera que para utilizar o raciocínio proporcional devemos pensar em termos relativos, ou seja, que a razão e as duas quantidades que a compõem são distintas. Por exemplo, se estamos a estabelecer a razão entre número de copos de sumo e número de copos de água, a razão não são copos de sumo e copos de água mas sim uma entidade nova no contexto. Esta situação constitui uma dificuldade para a maioria das crianças, que pensam em termos absolutos (Costa, 2007).

Costa (2007) faz referência aos pré-requisitos requeridos no raciocínio proporcional que foram enunciados por Langrall e Swafford (2000). Assim os alunos deverão: i) distinguir situações em que é adequado usar a razão; ii) identificar a diferença entre as mudanças absolutas ou aditivas e as relativas ou multiplicativas iii) compreender que as quantidades envolvidas numa razão covariam mas que a relação entre elas não se altera; e iv) construir, de forma crescente, as estruturas unitárias complexas. Segundo Costa (2007) Cramer e Post (1993) acrescentam ainda que os alunos: devem ser capazes de reconhecer situações proporcionais das não proporcionais, resolvendo tarefas de raciocínio proporcional de natureza quantitativa e qualitativa; devem compreender que podem ser usados vários métodos na resolução de tarefas proporcionais e que esses métodos se relacionam entre si; e, também não se deixarem influenciar, durante a resolução das tarefas, pelo contexto dos números.

Segundo referem Stanley, McGowan e Hull (2003), citados em Silvestre & Ponte (2012), a abordagem tradicional à proporcionalidade, através da resolução de exercícios de proporções, deveria dar lugar a atividades em que os alunos apreendam a proporcionalidade como “variação mútua de duas grandezas” (p. 76).

2.3.2. Natureza das tarefas

Surgindo a necessidade de perceber que tipo de tarefas melhor proporcionam e desenvolvem o raciocínio proporcional nos alunos, Post, Behr e Lesh (1988) apresentaram sete tipos de tarefas sobre proporções, onde as tarefas de valor omisso e de comparação são as mais abordadas e valorizadas no ensino e na investigação. Distinguem como tal, as tarefas com problemas de valor omisso (dão-se três dos valores que compõem uma proporção e é pedido o quarto); de comparação (dão-se duas razões e não se requer uma resposta numérica mas sim a comparação das duas - qual é a maior, menor ou se são iguais); de proporção, distinguindo dois tipos, as tarefas de proporção que envolvem a conversão entre razão, taxa e frações e as envolvem unidades de medida assim como números; de conversão entre sistemas de representação (sem alterar a relação entre os dados, os alunos têm de representá-los de outra forma, noutro sistema de representação), por exemplo por exemplo, se a razão entre rapazes e raparigas na turma é de 15 para 12, qual é a fração de rapazes na turma?; de valor médio, nos quais são dados dois valores e o objetivo é encontrar um terceiro, por exemplo: média geométrica e média harmónica; de transformação, ao nível do raciocínio: i) alterar valores de uma certa quantidade para comparar depois as duas razões, por exemplo partindo de uma equivalência a/b = c/d, é alterado certa quantidade de um ou dois dos quatro valores (a, b, c ou d) e o aluno tem de decidir qual a relação das relações “menor que”, “maior que “, “igual a“ ou “equivalente a” é agora verdadeira; ii) alterar uma quantidade de forma a obter uma igualdade entre as duas razões.

Tendo em conta o significado que as palavras apresentam num determinado contexto comunicativo, neste caso, os problemas que envolvem o estudo da proporcionalidade, Parish (2010) refere que Lamon (1993) definiu quatro tipos de tarefas: as que envolvem comparação de duas medidas extensivas que resulta numa intensiva (por exemplo, quilómetros por hora que resultam numa velocidade) – tarefas de Medidas conhecidas; as tarefas em que a medida extensiva de uma parte do todo é dado em termos relativos a dois ou mais partes de que é composto (por exemplo, a razão entre área da parte de um retângulo pintada a azul e a área da parte pintada a branco desse mesmo retângulo)

- tarefas de Parte-parte-todo; tarefas onde a relação entre dois elementos não é conhecida ou explícita, mas está definida no contexto do problema (por exemplo, pessoas e número de pizzas) - tarefas de Conjuntos associados; e as de Ampliação e Redução, quando existe uma relação em que se deve preservar a relação de um para um.

2.3.3. Estratégias e dificuldades dos alunos

Silvestre (2012) refere que nos vários estudos conduzidos pelo *Rational Number Project* estão identificadas várias estratégias para resolver problemas de proporcionalidade direta, todas elas de natureza multiplicativa: (i) Estratégia da razão unitária que consiste na estratégia mais intuitiva, usada pelos alunos desde muito cedo e que corresponde ao cálculo da razão unitária (problemas de divisão) e ao calculado dos seus múltiplos (problemas sobre multiplicação); (ii) Estratégia do fator de mudança em que os alunos colocam muitas vezes a questão "tantas vezes como" nos problemas numéricos; (iii) Estratégia da comparação das razões, aplicada nos problemas de comparação, e que envolve duas divisões e posterior comparação das razões unitárias; (iv) Estratégia do algoritmo do produto cruzado, a chamada "regra de três simples"; e (v) Estratégia da interpretação gráfica, onde os gráficos são usados para identificar razões equivalentes ou para identificar a parte omissa em problemas de proporcionalidade direta.

Na opinião de Silvestre (2012) o raciocínio proporcional pressupõe a compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, como tal as estratégias que os alunos usam ajudam a clarificar o nível de compressão dessa relação. Para a autora os alunos conseguem resolver problemas de proporcionalidade direta, sem recorrer do raciocínio proporcional, usando dois tipos de estratégias, as pré-proporcionais (utilizam simultaneamente relações aditivas e multiplicativas - por exemplo, metade, dobro e triplo - como as estratégias de composição/decomposição) e as não proporcionais (utilizam procedimentos de contagem unitária e aditivos). Optar por uma estratégia e não por outra, depende da interpretação que o aluno faz do problema, do seu conhecimento sobre os números e das relações que consegue estabelecer de imediato. A autora refere ainda que muito está ainda por investigar sobre o que leva os alunos a optarem, em cada momento, por uma estratégia em prol de outra.

A literatura apresenta um leque de diversas dificuldades dos alunos na resolução de problemas de proporcionalidade direta. Segundo Costa (2007), os autores Cramer e Post (1993) defendem que o contexto e a natureza das relações numéricas surgem como fonte de dificuldades para a resolução de problemas proporcionais e, apontam os problemas de escalas como sendo os contextos que trazem mais dificuldades. Propõem que se comece por contextos familiares e só mais tarde se apele aos menos familiares, promovendo a capacidade de usar estratégias diferentes em diferentes tipos de tarefas. Para Langrall e Swafford (2000), segundo Costa (2007) o raciocínio proporcional deve ser desenvolvido por um período alongado de tempo e não apenas como uma unidade ou capítulo partindo de situações que familiares do aluno, apelando ao raciocínio informal, e só então promover a utilização de estratégias de raciocínio quantitativo, como a razão unitária e o fator escalar.

Capítulo 3

Unidade de Ensino

Neste capítulo inicialmente farei uma contextualização da unidade de ensino nas orientações curriculares para o ensino da Matemática. Posteriormente é apresentada a planificação da unidade de ensino que sustenta este estudo. Faço referência às estratégias de ensino adotadas tendo em conta o método do ensino exploratório baseando-me em alguns autores para sustentar as fases de trabalho em sala de aula desenvolvidas. Por último, apresenta-se o modo como o trabalho em sala de aula foi organizado.

3.1. Ancoragem da unidade de ensino nas orientações curriculares

No PMEB (ME, 2013) a iniciação à Álgebra, no primeiro ciclo do ensino básico, surge na resolução de problemas com sequências e regularidades (2º ano – PMEB 2013, pág. 9 e METAS pág. 11), ao se estabelecerem relações entre números e entre números e operações. Este trabalho é aprofundado e enriquecido, no 6º ano de escolaridade, com o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas que envolvam o raciocínio proporcional. Este programa assume que os alunos, à entrada do 3.º ciclo, deverão mostrar fluência e desembaraço na realização de situações que envolvam proporcionalidade direta entre grandezas, pretendendo-se oferecer aos alunos um primeiro contacto com os métodos simbólicos próprios da Álgebra, que permitem deduzir e organizar um certo número de conhecimentos de forma sistemática.

A Álgebra tem vindo a ocupar um lugar de relevo nos currículos do ensino básico, deixando de se centrar exclusivamente na manipulação de símbolos e no cálculo algébrico. Atualmente constitui um campo alargado que inclui aspetos como a descoberta de padrões, sequências e regularidades. A par dessa incursão pelos primeiros anos de escolaridade, defende-se o desenvolvimento do pensamento algébrico através de tarefas onde os alunos tenham de representar situações, analisar relações matemáticas e fazer generalizações (Mestre & Oliveira, 2012; Ponte et al., 2007). Apesar de o atual Programa dar uma ênfase especial à generalização das propriedades e regras operatórias, contempla também as sequências e regularidades. Assim, no âmbito do conteúdo Sequências e Regularidades, para o sexto ano é feita referência à determinação de termos de uma sequência definida por uma lei de formação recorrente ou por uma expressão geradora; determinação de expressões geradoras de sequências definidas por uma lei de formação recorrente; e problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida (PMEB, 2013, p.18).

A proporcionalidade direta é um tema fundamental do currículo de Matemática do 2.º ciclo, não só porque favorece a passagem do raciocínio concreto para o raciocínio formal, mas ainda porque permite que os alunos pensem em termos relativos e não só em termos absolutos, o que é a chave para se compreender Matemática, uma ciência essencialmente de relações. Em tempos, a propósito da proporcionalidade, o seu ensino estava, não só em Portugal como em muitas outras partes do mundo, ligado quase exclusivamente à prática de regras (produto cruzado ou regra de três simples), descurando o desenvolvimento do raciocínio proporcional (Lamon, 2007), tão necessário a outros conteúdos do currículo e até a outras disciplinas. Na verdade, raciocinar proporcionalmente implica estabelecer relações multiplicativas com valores de duas grandezas. Essas relações multiplicativas podem ser encaradas de duas maneiras, “dentro” das grandezas ou “entre” as grandezas (Silvestre, 2012).

No segundo ciclo, os domínios de conteúdos são quatro: Números e Operações, Geometria e Medida (GM), Álgebra (ALG) e Organização e Tratamento de Dados (OTD). Relativamente aos domínios Números e Operações e Álgebra, o programa refere que no final deste ciclo, os alunos deverão, mostrar fluência e desembaraço na utilização de números racionais em contextos variados, relacionando as suas diversas representações (frações, dízimas, numerais mistos, percentagens) e tratar situações que envolvam proporcionalidade direta entre grandezas. São igualmente estudadas potências de base racional positiva e expoente natural, fazendo-se uma primeira abordagem aos métodos simbólicos próprios da Álgebra, que, segundo os autores, permitem deduzir e organizar um certo número de conhecimentos de forma sistemática.

No quinto ano o domínio Álgebra apresenta como Subdomínio Expressões Algébricas e Propriedades das Operações. Aqui são abordadas as prioridades convencionadas das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, a utilização de parêntesis, as propriedades associativa e comutativa da adição e multiplicação e propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição e subtração, como também os elementos neutros da adição e da multiplicação e elemento absorvente da multiplicação de números racionais não negativos. É feita referência à utilização do traço de fração com o significado de quociente de números racionais, inversos dos números racionais positivos, produto e quociente de quocientes de números racionais. O inverso de um produto e de um quociente de números racionais, o cálculo de expressões numéricas envolvendo as quatro operações aritméticas e a utilização de parêntesis, distinguindo a linguagem natural e linguagem simbólica, são conteúdos abordados.

No sexto ano de escolaridade, também no domínio da Álgebra, existem três subdomínios: Potências de expoente natural, Sequências e Regularidades e Proporcionalidade Direta. Apresentam conteúdos tais como, determinação de termos de uma sequência definida por uma lei de formação recorrente ou por uma expressão geradora, como também a determinação de expressões geradoras de sequências definidas por uma lei de formação recorrente, resolvendo problemas que envolvam a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida. O subdomínio Proporcionalidade Direta engloba a noção de grandezas diretamente proporcionais e de constante de proporcionalidade direta, reconhecendo uma proporção e a propriedade associada. Fala-se pela primeira vez na regra de três simples. Implícito a este subdomínio, as escalas em mapas e os problemas envolvendo a noção de proporcionalidade direta entre grandezas mutuamente dependentes são conteúdos bastante desenvolvidos.

3.2. Planificação da unidade de ensino

A unidade de ensino que me propus desenvolver tem como objetivo promover junto dos alunos do 6.º ano de escolaridade estratégias de generalização, associados ao raciocínio proporcional, nos subdomínios Sequências e Regularidades e Proporcionalidade Direta.

Como tal, o trabalho em sala de aula deve proporcionar aos alunos um conjunto de tarefas que lhes permita partir das suas conceções e experiências para a construção do saber matemático. O desenvolvimento da unidade de ensino seguiu a ordem dos domínios e subdomínios da planificação anual da escola. No primeiro ciclo do ensino básico os alunos iniciam o contacto com as Sequências e Regularidades resolvendo problemas onde estabelecem relações entre números e estes com as operações. Mais tarde, no segundo ciclo, no sexto ano de escolaridade, todo este trabalho é aperfeiçoado e aprofundado quando resolvem problemas que envolvem o raciocínio proporcional.

Embora sejam trabalhadas as noções de razão e proporção, estas não constituem necessariamente o ponto de partida para o ensino formal da proporcionalidade direta no sexto ano, podendo usar-se outras vias como as que valorizam a correspondência entre variáveis (explorando a sua covariação) e tendo como ponto de partida todas as noções inerentes às Sequências e Regularidades (Pedro, 2013).

Pretende-se com esta unidade de ensino que os alunos desenvolvam o seu raciocínio proporcional quando: (i) exploram a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, reforçando o seu conhecimento sobre a covariação de grandezas e invariância de relações em certas condições; (ii) trabalham na resolução de problemas envolvendo relações de proporcionalidade direta (de valor omisso); e (iii) trabalham em simultâneo com diferentes representações (tabelas; razão na forma de fração, número decimal e linguagem simbólica).

No subdomínio Proporcionalidade Direta, do domínio da Álgebra, do programa (ME, 2013) está incluído o conteúdo Escalas. No entanto, este não foi abordado nesta unidade de ensino devido ao facto de o manual escolar adotado estar organizado de uma forma que separa o conteúdo Proporcionalidade Direta do de Escalas. Dada a extensão da unidade de ensino e o tempo disponível para a recolha e análise de dados deste estudo, optei por não explorar e desenvolver este tema. Esta opção teve também em linha de conta que o conjunto de aulas da unidade planificada permitiria a obtenção dos dados necessários para dar resposta às questões de pesquisa deste estudo. Das vinte e seis aulas planificadas para a unidade de ensino "*Sequências e Regularidades* e *Proporcionalidade direta*" apenas foram utilizadas treze, na aplicação das tarefas. Pelo que as aulas seguintes serviram não só para aprofundar e aperfeiçoar os conteúdos resultantes da aplicação das tarefas, como também para introduzir e desenvolver o conteúdo das escalas.

Na escola onde este estudo foi realizado, a disciplina de Matemática, no segundo ciclo, tem uma carga letiva semanal de cinco tempos de cinquenta minutos distribuídos por três dias: dois blocos de cem minutos cada e um tempo de cinquenta minutos. Para a realização desta experiência de ensino foram previstas treze aulas de cinquenta minutos (Quadro 4). A unidade de ensino organiza-se em torno de tarefas de exploração e problemas. Procurei partir de tarefas que permitissem aos alunos usar inicialmente estratégias intuitivas, mas que permitissem conduzir a outras estratégias mais formais e estruturadas.

Foram elaboradas oito tarefas de dois tipos: explorações e problemas realizadas aos pares e onde os alunos tiveram a possibilidade de utilizar a calculadora elementar. No quadro 4 são apresentados os objetivos destas tarefas, preparadas para este estudo. As tarefas um a quatro (anexo 4) exploram regularidades pictóricas e pretendem que, através da análise de padrões, os alunos determinem termos e ordens de sequências, tendo em conta a sua lei de formação. A noção de expressão geradora começa logo a ser desenvolvida na tarefa 3. Igualmente, pretende-se desenvolver a capacidade dos alunos de identificar relações e a sua representação, através de linguagem matemática. Como transição para a Proporcionalidade Direta, as tarefas cinco a oito (anexo 4) são de natureza exploratória e problemas, que permitem analisar não só relações de covariância e de invariância entre as grandezas, como também desenvolver a capacidade para distinguir situações onde existe proporcionalidade, de situações onde ela não existe.

Todas as tarefas permitem trabalhar com diferentes formas de representações (tabelas, esquemas, desenhos). As tarefas iniciais são acompanhadas da representação visual de um ou mais termos da sequência. A utilização de um suporte visual na apresentação da situação facilita a aplicação de diferentes abordagens para chegar à generalização, permitindo a aplicação de estratégias de natureza visual e não visual, facilitando assim os alunos a passar do contexto visual para o numérico, e estabelecendo a ligação entre as duas formas de representação (Barbosa, 2009). Ainda no caso das tarefas sobre sequências, foram escolhidas questões que envolvessem termos distantes, o raciocínio inverso e a identificação da expressão geradora da sequência. Nas tarefas relativas à proporcionalidade direta procurou-se elaborar questões que permitissem perceber se os alunos reconheciam situações de proporcionalidade direta, a constante de proporcionalidade, assim como o seu significado.

Quadro 4 – Planeamento da Experiência de ensino

Tarefa	Descrição	Data	Tempo (bloco de 50 minutos)
Tarefa 1 **Tostas em fila**	• Identificar os termos e as ordens de uma sequência. • Investigar regularidades numa sequência de repetição. • Perceber o significado de "sequência", "termo" e "ordem". • Determinar os termos seguintes a um dado termo, na sequência pictórica, conhecida a sua lei de formação. • Compreender o significado de Lei de Formação. • Analisar as relações entre os termos de uma sequência pictórica e a sua ordem.	12/01/2015 2ªf	1
Tarefa 2 **Pulando a cerca**	• Investigar regularidades numa sequência pictórica. • Determinar os termos seguintes a um dado termo, na sequência pictórica, conhecida a sua lei de formação. • Determinar termos de ordens variadas de uma sequência pictórica crescente, conheceida a sua lei de formação. • Indicar uma regra geral, utilizando a linguagem natural e/ou simbólica	12/01/2015 2ªf	1
Tarefa 3 **Brincando com berlindes**	• Investigar regularidades numa sequência pictórica. • Determinar os termos seguintes a um dado termo, na sequência pictórica, conhecida a sua lei de formação. • Determinar termos de ordens variadas de uma sequência pictórica crescente, conheceida a sua lei de formação. • Utilizar a relação entre o termo e a sua ordem na sequência para verificar a existência de uma ordem respeitante a um dado termo. • Analisar as relações entre os termos de uma sequência pictórica crescente e a sua ordem. • Indicar uma regra geral, utilizando a linguagem natural e/ou simbólica • Perceber a noção de "Expressão Geradora"	14/01/2015 4ªf	1,5

Tarefa 4 **Os Fósforos**	• Investigar regularidades numa sequência pictórica. • Determinar os termos seguintes a um dado termo, na sequência pictórica, conhecida a sua lei de formação. • Determinar termos de ordens variadas de uma sequência pictórica crescente, conheceida a sua lei de formação. • Analisar as relações entre os termos de uma sequência pictórica crescente e a sua ordem. • Indicar a expressão geradora (linguagem natural e/ou simbólica), utilizando a linguagem natural e/ou simbólica.	19/01/20 15 2ªf	1,5
Tarefa 5 **Parques de estacionamento**	• Investigar regularidades numa sequência numérica. • Distinguir grandezas diretamente proporcionais, das que não são diretamente proporcionais. • Distinguir uma relação de proporcionalidade direta de outra que não o é, investigando as relações numéricas que envolvem duas situações que apresentam o mesmo contexto. • Reconhecer a relação de covariação e invariância que envolve a relaçao de proporcionalidade direta, evidenciando a natureza multiplicativa. • Explicar o significado do invariante (constante de proporcionalidade) • Compreender que o invariante (constante de proporcionalidade) pode ser representado da forma decimal ou na forma de razão (representação como fração ou com dois pontos). • Indicar uma regra geral, utilizando a linguagem natural e/ou simbólica, para expressar a relação de proporcionalidade direta.	21/01/20 15 4ªf	2
Tarefa 6 **Na loja de doces**	• Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso) • Aplicar a noção de proporcionalidade direta • Desenvolver a capacidade de resolução de problemas	26/01/20 15 2ªf	2
Tarefa 7 **A joaninha**	• Investigar regularidades numa sequência numérica. • Distinguir grandezas diretamente proporcionais, das que não são diretamente proporcionais. • Distinguir uma relação de proporcionalidade direta de outra que não o é, investigando as relações numéricas que envolvem duas situações que apresentam o mesmo contexto. • Reconhecer a relação de covariação e invariância que envolve a relaçao de proporcionalidade direta, evidenciando a natureza multiplicativa. • Explicar o significado do invariante (constante de	28/01/20 15 4ªf	2

	proporcionalidade) • Compreender que o invariante (constante de proporcionalidade) pode ser representado da forma decimal ou na forma de razão (representação como fração ou com dois pontos). • Indicar uma regra geral, utilizando a linguagem natural e/ou simbólica, para expressar a relação de proporcionalidade direta. • Reconhecer a propriedade fundamental das proporções e os termos associados a uma proporção. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas.		
Tarefa 8 **Telefonicamente falando**	• Investigar regularidades numa sequência numérica. • Distinguir grandezas diretamente proporcionais, das que não são diretamente proporcionais. • Distinguir uma relação de proporcionalidade direta de outra que não o é, investigando as relações numéricas que envolvem duas situações que apresentam o mesmo contexto. • Reconhecer a relação de covariação e invariância que envolve a relaçao de proporcionalidade direta, evidenciando a natureza multiplicativa. • Explicar o significado do invariante (constante de proporcionalidade). Compreender que o invariante (constante de proporcionalidade) pode ser representado da forma decimal ou na forma de razão (representação como fração ou com dois pontos). • Reconhecer a propriedade fundamental das proporções e os termos associados a uma proporção. • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fração; razão utilizando dois pontos e decimal, regra de três simples • Indicar a Expressão Geradora, para expressar a relação entre duas grandezas. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas.	02/02/2015 2ªf	2

3.3. Estratégias de ensino

As aulas desta unidade de ensino basearam-se na metodologia de ensino exploratório. Logo no início da unidade informei a turma, de que durante as aulas em que resolveríamos as tarefas iriam trabalhar sempre em grupo de dois alunos e que deveriam cooperar entre si. Alertei os alunos para o facto de deverem responder o mais completo e da forma mais clara possível, nunca esquecendo de registar as suas estratégias de resolução, como também as suas ideias e conclusões.

A tarefa era distribuída aos alunos e logo de seguida a aula era organizada em três fases: apresentação da tarefa onde a tarefa era lida por mim para o grupo/turma, seguindo-se a sua exploração pelos alunos em pares, e havendo uma discussão das resoluções e resultados , procedendo-se à sintetização/sistematização de ideias e registos dos alunos no caderno diário.

Na primeira fase, tentava perceber se os alunos tinham compreendido não só o significado de todas as palavras, como também o que se pretendia em cada questão, no sentido de reconhecerem qual o objetivo da tarefa que lhes era apresentada, e motivá-los em modo de desafio para o trabalho. Na fase da exploração acompanhava e apoiava os alunos na realização da tarefa, tendo sempre o cuidado que os meus comentários e as respostas às suas questões não reduzissem o nível de exigência da tarefa, como também, não originasse uma utilização de estratégias pouco ricas e variadas, pois não podia correr o risco de prejudicar ou mesmo inviabilizar a fase da discussão matemática. Procurava também assegurar que todos os alunos se envolviam ativamente na realização das tarefas.

Depois de resolvida a tarefa passava-se à fase de discussão. A metodologia adotada era seguir a ordem das questões como se apresentavam na tarefa e, cada grupo por seleção por parte da professora apresentava oralmente as suas resoluções/conclusões. Entregava uma outra tarefa em branco, para que os alunos pudessem registar as respostas corretas e ficarem com um elemento resultante da atividade, dado que recolhia as tarefas em que tinham as suas resoluções para análise. A fase da discussão e sintetização foi algo particularmente exigente para a professora, especialmente a gestão da discussão coletiva. Embora me baseasse na planificação e na observação que fiz do trabalho dos alunos existiram momentos muito variados e diferentes do inicialmente previsto tendo de gerir as interações de muitos protagonistas mediando a discussão e comparando resoluções. (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013). Ainda nesta fase pretendeu-se encorajar a reflexão matemática, que se traduz em levar os alunos a compreender, comparar e generalizar ideias matemáticas; a considerar e discutir relações entre ideias; a usar diversas resoluções; a procurar resoluções alternativas e a promover o uso de estratégias de resolução eficazes; e promover o raciocínio matemático, envolvendo a justificação das ideias e das estratégias dos alunos e o acompanhamento das justificações dos colegas (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

Como professora e assumindo o comando da aula realizei "ações instrucionais": Ações de desafiar os alunos a apresentar as suas ideias e estratégias; ações de apoio, recordando o objetivo da discussão, do problema ou da ideia, e sugerir a interpretação de uma ideia, repetir o argumento, reforçar o pensamento do aluno; introduzir diferentes representações e contextos (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

Como referido anteriormente a metodologia de ensino abordado nestas aulas – ensino exploratório – revelou-se inicialmente complexa. A dinamização e gestão das discussões matemáticas coletivas é algo que se revela, para o professor, desafiante e na medida em que, apesar de se preparar cuidadosamente toda a discussão, irão surgir sempre situações que não se conseguiram prever e isso cria uma sensação de não controlo. Este tipo de ensino distingue-se do ensino direto. O professor e os alunos têm papéis distintos, as tarefas que são propostas e a forma como são geridas e a comunicação que é originada na aula são distintas nestes dois tipos de ensino. No ensino direto, o professor é que transmite a informação aos alunos. No ensino exploratório, a aprendizagem dos alunos resulta da partilha com os colegas e com o professor as suas ideias, que surgem da realização das tarefas, promovendo uma aprendizagem simultaneamente individual e coletiva, que "…resulta da interação dos alunos com o conhecimento matemático, no contexto de uma certa atividade matemática, e também da interação com os outros (colegas e professor) ” (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

Na realização das primeiras tarefas apercebi-me que os alunos sabiam explicar o seu raciocínio oralmente bastante bem, mas que sentiam dificuldades quando o tinham de fazer por escrito. No entanto esta dificuldade foi se desvanecendo no decorrer unidade de ensino. As fases da discussão e sistematização foram de grande importância para desenvolver nos alunos a capacidade de ultrapassar esta dificuldade. No momento da sistematização houve o cuidado de perceber se os alunos conseguiram reconhecer os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos, estabeleceram-se conexões com aprendizagens anteriores. Para além da sintetização de ideias, sistematizou-se as aprendizagens matemáticas resultantes da realização das tarefas da unidade de ensino (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

3.4. As tarefas propostas

Nesta última secção deste capítulo é feita uma análise detalhada de cada uma das oito tarefas, através da discussão de algumas particularidades. Como referi acima, as tarefas eram lidas por mim com objetivo de explicar algum termo ou sentido de frase que fosse mais de difícil compreensão, e só depois cada aluno iria ler e interpretar, individualmente. De início, apercebi-me de que apesar de estarem sensibilizados para resolverem a tarefa em pares, alguns alunos só sentiram necessidade de dialogar entre si quando alguma dúvida lhes surgia individualmente e necessitavam de esclarecimentos por parte do colega. Depois de lidas disponibilizei sempre tempo para que os alunos resolvessem a tarefa. Este tempo foi variando e adaptado a cada tarefa, variando entre os quinze e vinte e cinco minutos. Os quinze/vinte minutos do final de cada aula serviam para a discussão das resoluções e síntese dos conteúdos. As aulas onde foram realizadas as tarefas tiveram, maioritariamente, a duração de cem minutos. No entanto, nas duas primeiras ocuparam-se apenas cinquenta minutos para cada uma delas.

A tarefa 1 tratava-se de uma tarefa de revisão, envolvendo uma sequência de repetição, pois houve necessidade de recordar alguns conceitos associados às sequências. Esta tarefa teve como principal objetivo levar os alunos a compreender o significado de lei de formação para conseguirem determinar os termos seguintes a um dado termo, na sequência pictórica. A tarefa 2 teve como principais objetivos levar os alunos a determinar termos mais distantes de uma sequência pictórica, conhecida a sua lei de formação e dar os primeiros passos na elaboração de uma regra geral, utilizando a linguagem natural e/ou simbólica. Para as tarefas 3 e 4 houve necessidade de se alargar o tempo, tendo-se ocupado setenta e cinco minutos para cada uma delas. Estas foram pensadas no sentido de analisar as relações entre os termos de uma sequência pictórica crescente e a sua ordem, indicar uma regra geral, utilizando a linguagem natural e/ou simbólica, começar a compreender a noção de "expressão geradora". Com a tarefa 4 concretizou-se o objetivo de levar os alunos a elaborarem uma expressão geradora, utilizando ainda uma linguagem natural e/ou simbólica. Assim, as tarefas 1 a 4 envolvem sequências pictóricas, mas enquanto a primeira destas é uma sequência de repetição, as restantes são crescentes.

A tarefa 5, constitui uma tarefa de transição, onde se dá o salto para o tema da proporcionalidade direta. Pretendia-se que os alunos conseguissem distinguir uma relação de proporcionalidade direta de outra que não o é, investigando as relações numéricas que envolvem duas situações que apresentam o mesmo contexto, que reconhecessem a relação de covariação e invariância que envolve a relação de proporcionalidade direta, evidenciando a natureza multiplicativa, e explicassem o significado do invariante (constante de proporcionalidade) e se possível tendo por base a experiência obtida com as tarefas anteriores conseguissem indicar uma regra geral, utilizando a linguagem natural e/ou simbólica, para expressar a relação de proporcionalidade direta.

A tarefa 6 constitui um problema que se foca na determinação de valores omissos, não contemplando explicitamente a determinação da constante de proporcionalidade nem a generalização da relação de proporcionalidade direta. Com a tarefa 7 o principal objetivo foi auxiliar os alunos a concluirem e elaborarem a propriedade fundamental das proporções e reconhecerem os termos associados a uma proporção. Distinguir uma relação de proporcionalidade direta de outra que não o é, investigando as relações numéricas que envolvem duas situações que apresentam o mesmo contexto, como também, reconhecer a relação de covariação e invariância que envolve a relaçao de proporcionalidade direta, evidenciando a natureza multiplicativa, ler a razão e a proporção foi o que se pretendeu ao aplicar esta tarefa. Tudo isto para auxiliar o raciocínio dos alunos na elaboração de uma regra geral, utilizando a linguagem natural e/ou simbólica, para expressar a relação de proporcionalidade direta.

Por último, a tarefa 8 foi o culminar de todo este trajeto pensado e elaborado no sentido de promover e desenvolver nos alunos a capacidade de encontrar uma expressão geradora, para expressar a relação entre duas grandezas. Para as 5, 6, 7 e 8 tarefas foram necessários 100 minutos para aplicar, resolver, discutir e tirar conclusões em grupo/turma.

Capítulo 4

Metodologia da Investigação

Neste capítulo apresento as opções metodológicas do estudo, os participantes, os métodos e processos de recolha e análise dos dados.

4.1. Opções gerais do estudo

A metodologia usada neste estudo é de natureza qualitativa, seguindo o paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). Esta opção de metodologia pareceu-me ser a mais adequada, tendo em conta o objetivo e as questões que enunciei que se prendem, principalmente, com a compreensão dos processos de generalização dos alunos e as suas dificuldades. Com esta metodologia a fonte de dados é o ambiente natural, ou seja, a sala de aula do grupo/turma que participou no estudo e o investigador é o instrumento-chave na sua recolha. Esta investigação baseia-se na descrição e não na quantificação, a atenção incide sobre os processos, deixando em segundo plano os produtos e o resultado final. Os dados recolhidos são analisados, principalmente, de forma indutiva, e o significado é muito importante, apresentando assim, características próprias de uma investigação que utiliza uma metodologia qualitativa, enquadrada no paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994).

Este estudo incide sobre a minha prática profissional, na sala da aula, como professora de Matemática do sexto ano do segundo ciclo do ensino básico. Sempre foi minha preocupação atualizar-me e aperfeiçoar-me ao nível da minha prática letiva. Realizei ações de formação contínuas por forma a melhorar a minha prestação enquanto professora e melhorar as minhas estratégias de ensino para potenciar os conhecimentos e as aprendizagens dos alunos ajudando-os a superar algumas das suas dificuldades e o modo como encaram a disciplina de matemática.

É neste contexto que se verifica o processo de ensino-aprendizagem mas, como acontece com todos os professores, por vezes, surgem situações para os quais não tenho resposta imediata. A escolha deste nível de ensino é fundamentada por duas razões. Uma delas prende-se com o pesquisar para procurar respostas para os problemas da minha prática, pois sinto necessidade de compreender as dificuldades e os processos que os meus alunos utilizam para melhor conseguir proporcionar situações de aprendizagem que conduzam ao sucesso dos alunos. Ao tentar compreender os objetivos e metas da unidade de ensino vou também investigar a minha própria prática enquanto docente. Assim, com este estudo reflito sobre a minha prática pedagógica nas aulas, de um modo mais estruturado e aprofundado. A outra razão prende-se com o interesse em trabalhar com alunos que não tivessem, até ao momento, tido contacto com a álgebra formal, tentando assim perceber como evoluem em termos de raciocínio proporcional.

Considero que as opções metodológicas estão adequadas pois segundo Bogdan e Biklen (1994) as características de uma investigação interpretativa e qualitativa enquadram-se e estão adaptadas ao meu estudo: (i) a recolha de dados foi feita no ambiente natural dos participantes sendo eu a investigadora nessa recolha; (ii) como não formulei nenhuma hipótese à qual pretendia dar resposta, os dados foram analisados de uma forma indutiva; (iv) os dados recolhidos baseiam-se nas resoluções dos alunos e assumem uma natureza essencialmente descritiva; (iii) o objetivo foi estudar os processos inerentes ao raciocínio dos alunos e não apenas os resultados ou produtos; e (v) e tenho como objetivo a compreensão dos significados construídos pelos alunos. Tal como referido anteriormente, nunca desviando do verdadeiro objetivo do estudo e tendo em conta as características inerentes à realização do mesmo, para além de ter sido investigadora e professora em simultâneo, foi para mim bastante evidente seguir uma metodologia qualitativa e interpretativa, enquadrando-se assim no paradigma interpretativo, uma vez que a sua palavra-chave é compreender, sendo a construção de significados por parte dos alunos um aspeto essencial do mesmo.

4.2. Os participantes do estudo

4.2.1. Contexto

A recolha de dados decorreu no ano letivo de 2014/2015, sendo os participantes do estudo alguns alunos das turmas de sexto ano de escolaridade. Nesse ano, na escola, funcionavam três turmas envolvidas num projeto de homogeneidade relativa definido pela direção da escola, desde o ano letivo de 2013/14. Com este projeto os alunos, às disciplinas de Matemática e Português estavam agrupados em três grupos de nível com caraterísticas comuns quanto ao seu nível cognitivo e capacidades de aprendizagem. No final de cada período letivo e de acordo com a evolução dos alunos estes grupos eram refeitos para que no período seguinte se integrassem no grupo de nível mais adequado. Por opção da escola e dos docentes do grupo de Matemática e Ciências Naturais também havia rotatividade dos docentes pelos três grupos de nível. Assim, pode haver alunos que tenham estado apenas um período com o mesmo professor ou que tenham estado com esse mesmo professor mais do que um período.

Ainda relativamente ao processo de criação dos grupos, no final do primeiro período, em reunião com todos os elementos intervenientes neste projeto, decidiu-se que no segundo período iria haver uma alteração. Pensou-se que, embora os grupos continuassem a ser maioritariamente de homogeneidade relativa, talvez fosse benéfico para os alunos com desempenho mais baixo lhes fosse proporcionado a existência de um aluno-tutor em contexto de sala de aula, no sentido de verem as suas dúvidas esclarecidas no momento e, assim, ultrapassarem mais facilmente as suas dificuldades. Como tal, no segundo período foi-me atribuído o grupo onde se integravam alunos com bom desempenho. Alguns destes alunos iriam ser tutores de outros colegas que estariam na iminência de conseguir resultados positivos na disciplina neste período, mas que ainda revelavam dificuldades. Esta mudança de estratégia, com o objetivo de valorizar e reconhecer o trabalho dos alunos, proporcionou que tivesse um leque de alunos com caraterísticas, níveis e capacidades de aprendizagem distintas, o que sem dúvida me possibilita um leque mais alargado de resultados aquando da análise e compreensão das estratégias usadas e das dificuldades dos participantes neste estudo.

No ano letivo que antecedeu o desenvolvimento deste estudo solicitei as autorizações à presidente da Direção do Agrupamento de Escolas onde assumi o compromisso de informar e solicitar as devidas autorizações aos encarregados de educação dos alunos das turmas envolvidas, porque estes são menores de idade, e a manter o sigilo sobre a identidade da escola e alunos. É de referir que no início do segundo período realizei uma reunião com os diretores de turma e os pais e encarregados de educação dos alunos das três turmas, na qual foi dado a conhecer o estudo, os seus objetivos e os procedimentos tendo em vista a autorização na participação dos seus educandos, nesta investigação. Também lhes foi informado que só alguns alunos seriam selecionados para o estudo, e que os seus trabalhos seriam analisados com mais detalhe, esclarecendo ainda que esta situação não teria qualquer implicação na avaliação final realizada pelo professor responsável pela turma. Também foi garantido que este trabalho não tinha implicações sobre o horário letivo dos alunos. Nenhum encarregado de educação se opôs à realização do estudo.

4.2.2. Os alunos participantes

Os participantes no estudo foram selecionados a partir de um grupo/turma constituído a partir de três turmas do sexto ano de uma escola do centro de Portugal, mais propriamente, do distrito de Santarém. Este grupo/turma é constituído por vinte e um alunos (treze rapazes e oito raparigas), com idades que variam entre os onze e os treze anos. Deste grupo/turma fazem parte um aluno que está a repetir o sexto ano e um outro com necessidades educativas especiais, abrangido pelo Decreto-Lei n.º 319/91. As aulas decorrem usualmente num clima bastante agradável, em que todos os alunos tentam participar, expondo as suas estratégias e dificuldades e como também perceber as dos colegas. Apesar de ser o primeiro ano que sou professora destes alunos, pois no ano letivo anterior apenas lecionei sextos anos, estes não tiveram dificuldade em adquirir hábitos de trabalho, nem na apresentação das suas ideias e raciocínios, tanto oralmente como por escrito. Os intervenientes mostram-se muito interessados e empenhados, revelando uma participação ativa.

Para a realização do estudo, foram selecionados cinco alunos de forma a poder analisar com maior profundidade os processos de generalização que estes evidenciam na resolução das tarefas propostas. Para a seleção destes alunos procurou-se que estes tivessem níveis de desempenho diversificados, assim como também que revelassem facilidade de comunicação das suas ideias na forma escrita, de modo a facilitar a recolha de dados. Assim, no final do primeiro período, uma das alunas apresentava um desempenho não satisfatório (Filomena), dois deles um desempenho satisfatório (Sílvia e Afonso), um aluno um bom desempenho (Guilherme) e uma aluna muito bom (Filipa). Segue-se uma breve apresentação dos alunos (utilizando nomes fictícios).

Filomena é uma jovem simpática, pouco extrovertida, com doze anos de idade. É uma aluna cuja timidez se foi dissipando ao longo dos primeiros contactos. Ao longo da sua vida escolar teve uma retenção no quarto ano do primeiro ciclo do ensino básico. Beneficia de apoio educativo à disciplina de Matemática. No quinto ano obteve, no final, nível dois e no primeiro período do sexto ano também obteve nível dois. É uma aluna com dificuldades, insegura mas muito esforçada e cumpridora. Faz os trabalhos de casa com grande regularidade, esforçando-se por obter uma resolução adequada e coerente. Tem noção das suas dificuldades e como tal pretende ultrapassá-las com muito trabalho e esforço.

Sílvia tem onze anos e nunca reprovou. Beneficia de apoio educativo na disciplina de Matemática. No quinto ano obteve, no final, nível três e no primeiro período do sexto ano obteve nível dois. É uma aluna com algumas dificuldades, muito irregular no seu percurso escolar. É muito faladora, distraindo-se facilmente e que não se dispõe facilmente a trabalhar.

Afonso tem doze anos e teve uma retenção no segundo ano do primeiro ciclo do ensino básico. É um aluno pouco interventivo nas aulas, maioritariamente reservado, no entanto, nas suas poucas participações revela um raciocínio rápido e habitualmente, com estratégias diferentes das dos colegas, mas que nem sempre consegue transmitir oralmente. É algo desorganizado, pouco responsável com os seus materiais, e nem sempre faz os trabalhos de casa que lhe são propostos. Tem sido um aluno médio, com nível três.

Guilherme tal como o Afonso é um aluno pouco participativo, no entanto, apresenta alguma facilidade em se expressar oralmente e por escrito, e revela desembaraço e agilidade ao nível do raciocínio. É um aluno interessado e organizado. Tem onze anos e nunca teve uma retenção, nem usufrui de apoio educativo. Faz com regularidade os trabalhos de casa.

Filipa tem onze anos e é uma menina simpática e sorridente, mas muito faladora, distraindo-se com facilidade, o que não interfere na apreensão dos conteúdos. Tem raciocínios matemáticos rápidos, coerentes e organizados. Mostra-se bastante motivada e interessada durante as aulas de Matemática. Tem sido uma aluna de nível cinco (no quinto ano) mas, no primeiro período do sexto ano, obteve o nível quatro.

4.3. Métodos de recolha de dados

A recolha de dados foi feita por mim, na sala de aula.Tendo em conta o objetivo e questões do estudo, a recolha de dados realizou-se recorrendo essencialmente a dois métodos, a observação direta das aulas e produções escritas dos alunos, e de forma complementar a um diário de bordo.

4.3.1. A observação de aulas

Este instrumento serviu para observar como os alunos interagem em contexto de sala de aula, nomeadamente, durante o seu trabalho autónomo, bem como nos momentos de discussão coletiva. Reconhecendo que este estudo tem por base o subdomínio "Proporcionalidade Direta", do domínio da Álgebra, o meu papel foi, simultaneamente, de investigadora e professora, pelo que esta investigação exigiu uma observação participante. Tendo em conta o grau de participação do investigador, esta pode ser participante ou não participante. Procurei estar atenta a todas as reações dos alunos ao longo da unidade de ensino, em especial nas aulas referentes à recolha de dados, sempre que me foi possível fui realizando pequenas anotações. Naturalmente, e uma vez que o papel de professora se sobrepôs ao de investigadora, estes registos não foram efetuados de forma sistemática e constante. No entanto, realizei filmagens das aulas referentes à recolha de dados e além disso, no final de cada aula fiz anotações. As filmagens apenas serviram como suporte à observação sendo usadas apenas para rever as aulas e elaborar as sínteses das mesmas.

4.3.2. Recolha documental

A recolha documental foi um método central para o estudo que realizo, pois as questões de investigação que me propus responder serão respondidas, em grande parte, pelas informações encontradas nas tarefas resolvidas pelos alunos, sendo as suas resoluções escritas um instrumento central na recolha de dados. É um instrumento que permite uma análise detalhada das estratégias de resolução dos alunos, bem como das suas dificuldades. Além disso, esta escolha prende-se também com o facto de que analisando as resoluções das tarefas torna possível efetuar comparações entre elas e analisar a evolução ocorrida nos alunos, ao longo da unidade de ensino. Assim, por forma a interpretar e compreender as estratégias dos alunos e os conhecimentos que evidenciam sobre o tema em estudo, como também melhor analisar as suas principais dificuldades, foi feita uma recolha das produções escritas de todos os alunos do turma/grupo, durante a unidade de ensino. Posteriormente foram selecionadas as tarefas da experiência de ensino de cinco alunos, sendo esta a principal fonte de dados. Foram também recolhidos dados através de um diário de bordo e de gravações de vídeos.

Ao longo de toda a unidade didática tive o cuidado de pedir aos alunos que não apagassem os cálculos auxiliares às suas resoluções. Aquando a fase da discussão em grupo turma, e para não correr o risco de os alunos apagarem as suas resoluções distribui novamente a tarefa em suporte papel onde efetuaram as devidas correções surgidas das discussões em grupo turma. Os alunos conseguiram aceder ao pedido, escrevendo a correção noutra folha de tarefa sem alterarem o que tinham escrito originalmente. Os alunos foram inicialmente avisados que deveriam justificar todas as suas resoluções. As tarefas tinham várias alíneas, mas nem todas foram analisadas. A seleção das alíneas a analisar prende-se com o facto ir selecionando as questões que mais dados ofereciam para atingir os objetivos da tarefa. Algumas alíneas serviram como introdução e enquadramento do objetivo principal da tarefa.

Apesar de todos os cuidados referidos quanto à recolha de dados, senti algum constrangimento no uso deste instrumento na recolha de dados pois o facto de os alunos ao escreverem a lápis, muitas vezes apagam o que escrevem, não permitindo assim ao investigador perceber como estava a pensar para resolver aquela questão.

4.3.3. Diário de bordo

Recorri também a um "diário de bordo" para efetuar a recolha de dados. Este serviu essencialmente para tomar notas referentes às expectativas do professor, reações dos alunos na fase de introdução da tarefa, atitudes/questões colocadas pelo professor no desenvolver da tarefa, como também questões específicas colocadas pelos alunos, dificuldades, comentários no decorrer da tarefa. O "diário de bordo" auxiliou na investigação pois possibilitou a realização de descrições sumárias das aulas e fazer anotações referentes a situações que me pareceram mais relevantes para este estudo, nomeadamente alguns momentos de aula onde se evidenciaram processos de raciocínio. Também foram registadas algumas intervenções dos alunos e principais conclusões. O "diário de bordo" permitiu-me recolher dados de uma forma natural e gradual, possibilitando-me refletir sobre o estudo à medida que este foi decorrendo. Na minha opinião e tendo por base estudos de Bogdan e Biklen (1994) foi sem dúvida um método de recolha de dados muito importante nesta investigação.

4.4. O processo de análise de dados

Após a recolha dos dados procedi à sua análise, procurando dar resposta às questões deste estudo. A recolha documental foi muito importante pois forneceu elementos relevantes para o problema em estudo. Obviamente, de modo a compreender o porquê de determinada resolução, recorri aos registos do "diário de bordo" e das filmagens efetuadas ao longo da unidade de ensino.

Tendo em conta o objetivo e questões de investigação deste estudo, os dados recolhidos em cada questão das tarefas selecionadas, e por aluno, foram organizados em tabelas onde se encontram resultados da análise das estratégias de generalização, das representações utilizadas pelos alunos, as estratégias de raciocínio inverso, quando existentes, como também do significado atribuído à constante de proporcionalidade em contexto, quando a identificavam. A opção por esta divisão diz respeito à procura de relações e conexões entre as diferentes estratégias de resolução dos alunos, bem como as suas dificuldades e no significado que atribuem aos conceitos envolvidos em cada questão. Construi-se tabelas síntese com todos os dados recolhidos para melhor confrontar os resultados obtidos a partir das respostas dos alunos participantes (anexo 5).

A análise de dados foi sendo realizada à medida que estes foram recolhidos, embora numa primeira fase de forma descritiva e com a intenção principal de verificar se as tarefas estavam a atingir os seus objetivos e a que aspetos seria importante aprofundar nas discussões em grupo turma. Nessa fase, tendo em conta a revisão de literatura realizada, fui analisando a diversidade de estratégias de generalização que os alunos evidenciavam, de acordo com a primeira questão do estudo, e o tipo de representações presentes nas suas resoluções, dando resposta à segunda questão do estudo.

Numa segunda fase da análise de dados, fazendo um confronto dos dados com a categorização das estratégias de generalização presente em outros estudos, houve a necessidade de categorização própria, a partir do estudo de Barbosa (2013) e posteriormente ajustada por Pedro (2013). Esta categorização diz respeito, por um lado, à determinação de termos próximos e/ou distantes de uma sequência e, por outro, à formulação explícita de uma regra geral, ou seja, à indicação da expressão geradora de uma situação de proporcionalidade direta. Tendo em conta a natureza das estratégias, os diferentes níveis de complexidade em termos da capacidade de generalização, e ao tipo de questões das tarefas que os alunos resolveram, as categorias são subdivididas, para melhor refletir o processo de generalização desenvolvido pelos alunos.

Quadro 5 – Estratégias de generalização

	Estratégias de generalização														
			Termo Unidade			*Diferença*			Funcional		*Regra geral Explícita*				
Estratégias	*Contagem*	*Adição de termos*	*Sem ajuste*	*Com ajuste numérico*	*Com ajuste contextual*	Recursiva	Múltiplo da diferença sem ajuste	Múltiplo da diferença com ajuste	Raciocínio Funcional	Raciocínio Funcional	Diferença sem ajuste	Diferença com ajuste	Raciocínio Funcional	Raciocínio Funcional	*Tentativa e erro*
	(C)	*(AT)*	*(TU_1)*	*(TU_2)*	*(TU_3)*	(D_1)	(D_2)	(D_3)	(FCF)	(FCN)	(ED1)	(ED_2)	(EFCF)	(EFCN)	(TE)

Descrição:

Contagem **(C)**	Desenhar figuras e contar os seus elementos.	
Adição de termos ***(AT)***	Obter um termo a partir da adição de outros termos.	
Termo Unidade	*Sem ajuste* **(TU_1)**	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico **(TU_2)**	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual **(TU_3)**	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.

Diferença	*Recursiva* ***(D1)***	*Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.*
	Múltiplo da diferença sem ajuste ***(D2)***	*Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ajustar o resultado, para obter termos próximos ou distantes.*
	Múltiplo da diferença com ajuste ***(D3)***	*Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, para obter termos próximos ou distantes. É feito um ajuste do resultado.*
Funcional	*Raciocínio Funcional* ***(FCF)***	*Usar o contexto da figura para determinar um termo próximo ou distante a partir da respetiva ordem.*
	Raciocínio Funcional ***(FCN)***	*Usar o contexto numérico para determinar um termo próximo ou distante a partir da respetiva ordem.*

Regra geral Explícita	*Diferença sem ajuste* ***(ED1)***	*Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo para obter uma regra geral, sem ajustar o resultado.*
	Diferença com ajuste ***(ED2)***	*Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo para obter uma regra geral, com ajuste.*
	Raciocínio Funcional ***(EFCF)***	*Usar o contexto da figura para obter uma regra geral.*
	Raciocínio Funcional ***(EFCN)***	*Usar o contexto numérico para obter uma regra geral.*
Tentativa e erro ***(TE)***	*Adivinhar uma regra fazendo sucessivas tentativas com diferentes valores.* *Conhecida uma regra, experimentar sucessivos valores até que sejam verificadas as condições pretendidas*	

As tarefas foram analisadas tenho em conta as estratégias de generalização que os alunos utilizam na determinação do termo distante, do raciocínio inverso (quando aplicável), como também da regra geral – a expressão geradora. Foram ainda analisados os tipos de representações utilizados pelos alunos para exprimir a regra geral.

Para a determinação de termos próximos ou distantes de uma sequência verificam-se as cinco primeiras categorias. Na categoria Funcional ao verificar-se que o aluno consegue determinar diretamente um termo a partir da sua ordem, assume-se que este reconhece uma relação de tipo funcional, apesar de não a representar de forma geral. Como tal esta estratégia baseia-se num raciocínio de tipo funcional, opondo-se a outras que se baseiam na diferença entre os termos.

Quando o aluno apresenta uma regra geral que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente, considera-se a categoria Regra Geral Explícita. Esta regra pode ser formulada a partir cálculos de diferenças entre termos consecutivos como fator multiplicativo ou usando um raciocínio funcional, quando perceciona a relação entre as duas variáveis.

Quando é solicitada, aos alunos, a determinação da ordem de um determinado termo, ou quando se lhes pede para verificar se determinado valor é termo da sequência, as estratégias dos alunos baseiam-se num raciocínio inverso. Neste sentido surgiu a necessidade de categorizar essas mesmas estratégias de raciocínio inverso. Para isso, e tendo por base o estudo de Pedro (2013), usa-se o mesmo quadro para analisar esta situação.

Quadro 6 – Estratégias em questões de raciocínio inverso

Estratégias			*Termo Unidade*			*Diferença*			*Exclusão*		*Explícita*		
	Contagem	*Adição de termos*	*Sem ajuste*	*Com ajuste numérico*	*Com ajuste contextual*	*Recursiva*	*Múltiplo da diferença sem ajuste*	*Múltiplo da diferença com ajuste*	*Características da figura*	*Características dos números*	*Tentativa e erro a partir de uma regra*	*Por exaustão a partir de uma regra*	*Operação inversa*
	(C)	*(AT)*	*(TU_1)*	*(TU_2)*	*(TU_3)*	(D_1)	*(D2)*	*(D3)*	*(ECF)*	*(ECN)*	*(ETE)*	*(EE)*	*(EOI)*

Contagem **(C)**	Desenhar figuras e contar os seus elementos.	
Adição de termos ***(AT)***	Obter um termo a partir da adição de outros termos.	
Termo Unidade	*Sem ajuste* ***(TU$_1$)***	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico ***(TU$_2$)***	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual ***(TU$_3$)***	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.

Diferença	*Recursiva* ***(D1)***	*Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.*
	Múltiplo da diferença sem ajuste ***(D2)***	*Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ajustar o resultado.*
	Múltiplo da diferença com ajuste ***(D3)***	*Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo. É feito um ajuste do resultado.*

Exclusão	*Características da figura* ***(ECF)***	*Usar as características das figuras da sequência para verificar que determinado valor não é um termo.*
	Características dos números ***(ECN)***	*Usar as características dos números da sequência para verificar que determinado valor não é um termo.*
Explícita	*Tentativa e erro a partir de uma regra* ***(ETE)***	*Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo para obter uma regra geral, sem ajustar o resultado.*
	Por exaustão a partir de uma regra ***(EE)***	*Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo para obter uma regra geral, com ajuste.*
	Operação inversa ***(EOI)***	*Usar o contexto da figura para obter uma regra geral.*

Nas tarefas onde se pretende que distingam situações de proporcionalidade direta das que não são como também que significado atribuem à constante de proporcionalidade no contexto, quando a identificam, foram consideraram-se os seguintes quadros:

Quadro 7 – Distinguir situações de proporcionalidade direta das que não são

Distinguir situações de proporcionalidade direta	SIM (S)
	NÃO (N)

Quadro 8 – Identificar e Significado da Constante de Proporcionalidade

Identificar a constante de proporcionalidade	IC
Identificar o inverso da constante de proporcionalidade	IIC
Atirbuir significado da constante de proporcionalidade em contexto	ASC

No sentido de perceber que tipo de representações utilizam os alunos nas estratégias de generalização que envolvem o raciocínio proporcional, seguindo Pedro (2013) e Mestre (2014), foram considerados cinco tipos de acordo com o seguinte quadro:

Quadro 9 – Representações utilizadas pelos alunos na generalização – expressão geradora

<table>
<tr><td rowspan="8">Tipos de Representações</td><td rowspan="2">Simbólica</td><td>Alfanumérica</td><td>Usa notação alfanumérica</td></tr>
<tr><td>Idiossincrática</td><td>Usa símbolos próprios</td></tr>
<tr><td>Pré-simbólica</td><td>Sincopada</td><td>Usa uma linguagem sincopada</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Icónica</td><td>Diagramas e Esquemas</td><td>Usa diagramas ou esquemas</td></tr>
<tr><td>Tabelas</td><td>Usa tabelas</td></tr>
<tr><td>Desenhos</td><td>Usa desenhos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Numérica</td><td>Usa uma expressão numérica</td></tr>
<tr><td colspan="2">Linguagem Natural</td><td>Usa uma descrição verbal escrita</td></tr>
</table>

Analisou-se as estratégias, as representações e as dificuldades/erros apresentados pelos alunos na procura de generalizações que englobam o raciocínio proporcional. Foram escolhidas questões das tarefas 2 a 4 que envolvessem termos distantes, o raciocínio inverso e a identificação da expressão geradora da sequência. Utilizou-se três categorizações tendo em conta as estratégias e representações escritas utilizadas pelos alunos na resolução de cada tarefa. Para cada questão é identificada a estratégia que cada aluno adotou, e quando se pretende o reconhecimento da expressão geradora é também feita a identificação das representações utilizadas.

As tarefas 1 e 6 não foram alvo de análise. A tarefa 1 por se tratar de uma sequência de repetição teve apenas como objetivo familiarizar os alunos com a noção de sequência. A tarefa 6 tem características diferentes. Foca-se na determinação de valores omissos e não contempla explicitamente a determinação da constante de proporcionalidade nem da generalização da relação de proporcionalidade direta. As tarefas 5, 7 e 8 são tarefas que envolvem o conceito de proporcionalidade direta. Pretende-se que os alunos encontrem uma expressão geradora, para expressar a relação entre duas grandezas, assim como identifiquem a constante atribuindo-lhe significado em contexto.

Capítulo 5

Análise do Trabalho dos alunos

Neste ponto apresenta-se a análise de dados realizada a partir de seis das oito tarefas realizadas pelos cinco alunos da turma selecionados para o estudo, e usando as categorias apresentadas no capítulo 4.

5.1.Tarefa 2 – *Pulando a Cerca*

A aula

Ao elaborar esta tarefa (anexo 4) apercebi-me que poderia surgir algumas ambiguidades relativamente ao contexto do problema. Daí ter tido o cuidado de apresentar imagens que minimizassem a existência de dificuldades de interpretação do enunciado e prejudicasse a sua normal realização pelos alunos. A imagem de suporte à tarefa foi impressa a cores, uma vez que era referido no enunciada da tarefa que as tábuas eram verdes. No entanto, apesar de prever e tentar contornar potenciais dificuldades dos alunos, observei que ainda assim houve alunos que não conseguiram interpretar corretamente o enunciado da tarefa.

A tarefa inicialmente foi lida por mim e só depois cada aluno leu e interpretou novamente, individualmente. O facto de os alunos terem resolvido a tarefa anterior em grupo, levou-os a espontaneamente iniciarem a resolução desta tarefa nessa modalidade. Os alunos começaram de imediato a trabalhar e rapidamente finalizaram a primeira e a segunda questões. Mais uma vez se verificou que a maioria dos alunos revelam mais facilidade de explicar o seu raciocínio oralmente do que por escrito. Esta tarefa foi classificada pelos alunos como sendo bastante fácil. A vinte minutos do final da aula deu-se início à discussão da resolução e síntese dos conhecimentos.

Estratégias e representações

Nesta tarefa incluiu-se duas questões (questão 3 e 4) envolvendo raciocínio inverso. Pretende-se que os alunos verifiquem se um determinado número de tábuas é um termo da sequência.

Pode existir uma vedação com 82 tábuas? Explica como obtiveste a tua resposta.

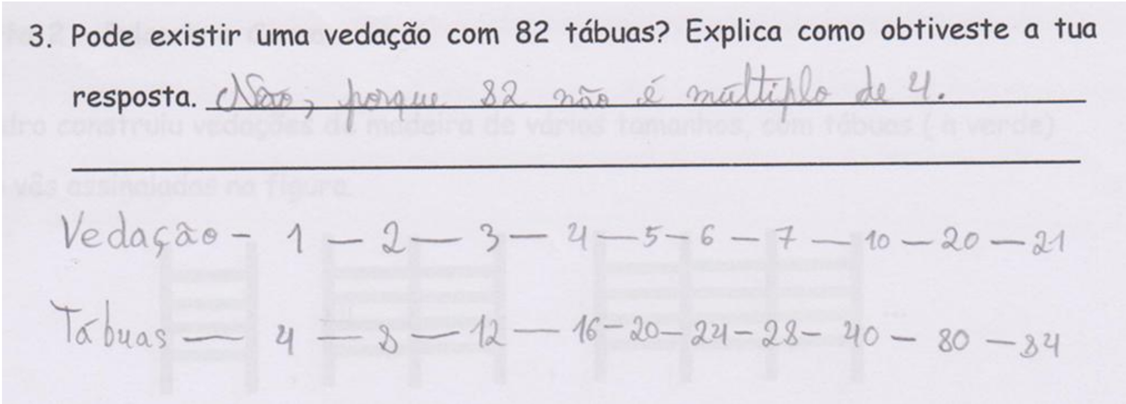
Figura 1 – Questão 3 da Tarefa 2

Quatro dos alunos usaram o mesmo tipo de estratégia na questão 3 desta tarefa.

Quadro 10 – Estratégias em questões de raciocínio inverso utilizadas na questão 3 da tarefa 2

Sílvia	Filipa	Guilherme	Afonso	Filomena
Características Dos Números (ECN)	Exclusão - Características dos números (ECN)	Exclusão - Características dos números (ECN)	Explícita - Operação inversa (EOI)	Exclusão - Características dos números (ECN)

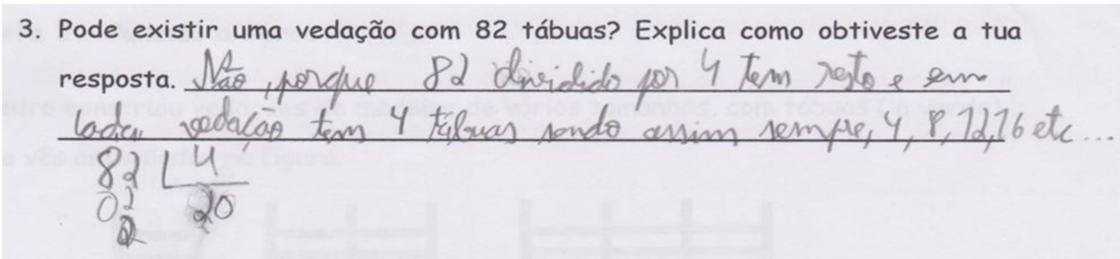
Nesta questão, os alunos utilizam o conhecimento sobre múltiplos e as características dos números da sequência para verificar que 82 não é termo da sequência (fig. 22). O Guilherme, por exemplo, identifica os termos de ordem 20 e 21 (80 e 84 tábuas, respetivamente) e, como tal, concluem que 82 não é termo da sequência. O Afonso utiliza a estratégia explícita utilizando a operação inversa para verificar se esse valor é termo da sequência, o que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente (EOI).


3. Pode existir uma vedação com 82 tábuas? Explica como obtiveste a tua resposta. Não, porque 82 não é múltiplo de 4.

Vedação – 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7 — 10 — 20 — 21

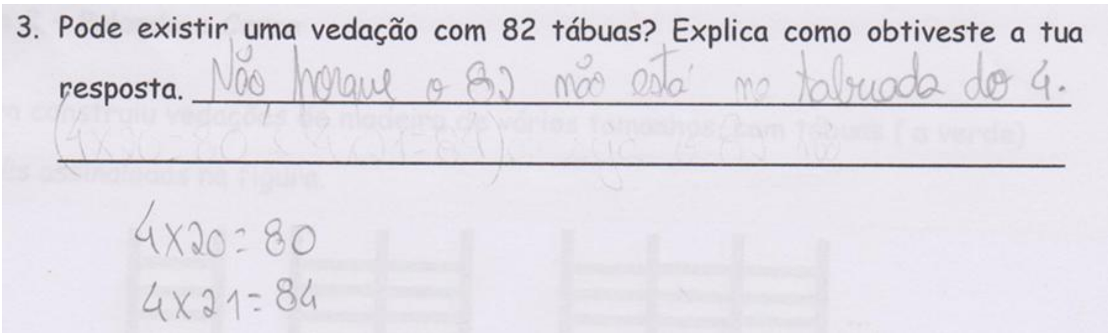
Tábuas — 4 — 8 — 12 — 16 — 20 — 24 — 28 — 40 — 80 — 84

Figura 2 – Resolução apresentada pela Filipa à questão 3 da Tarefa 2


3. Pode existir uma vedação com 82 tábuas? Explica como obtiveste a tua resposta. Não, porque 82 dividido por 4 tem resto e em cada vedação tem 4 tábuas sendo assim sempre, 4, 8, 12, 16 etc...

82 | 4
02 20
2

Figura 3 – Resolução apresentada pelo Afonso à questão 3 da Tarefa 2


3. Pode existir uma vedação com 82 tábuas? Explica como obtiveste a tua resposta. Não porque o 82 não está na tabuada do 4.

4x20=80
4x21=84

Figura 4 – Resolução apresentada pelo Guilherme à questão 3 da Tarefa 2

Na questão 5 (fig.5) pretende-se que os alunos indiquem uma regra, que lhes permita determinar o termo (o número de tábuas) de qualquer ordem (o número da vedação).

Indica uma *Regra* (em linguagem natural e/ou simbólica) que te permite determinar o número de tábuas em qualquer vedação?

Figura 5 – Questão 5 da Tarefa 2

Os quatro alunos que responderam a esta questão usaram dois tipos de estratégias distintas: uma recursiva e a outra funcional (Quadro 11). Uma das alunas não chega a registar uma regra, revelando não ter conseguido chegar a nenhuma conclusão.

Quadro 11 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 5 da Tarefa 2

Sílvia	**Filipa**	**Guilherme**	**Afonso**	**Filomena**
Diferença Recursiva (D_1)	Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCF)	Diferença Recursiva (D_1)	Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCF)	Não responde

A estratégia utilizada Sílvia e pelo Guilherme consiste em continuar a sequência com base no termo anterior. Como se observa na figura seguinte, a Sílvia exprime o valor que tem que adicionar a cada termo para obter o seguinte e ilustra esta relação de recorrência para os primeiros dez termos da sequência.

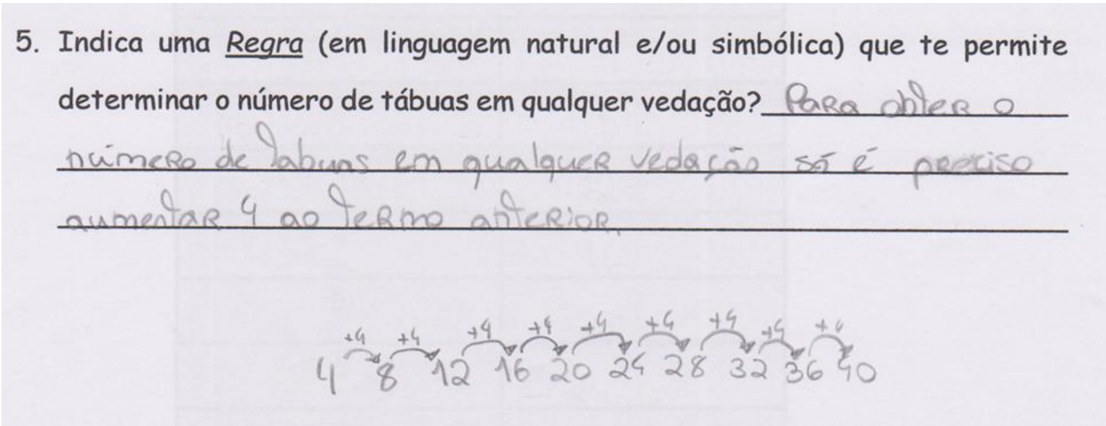
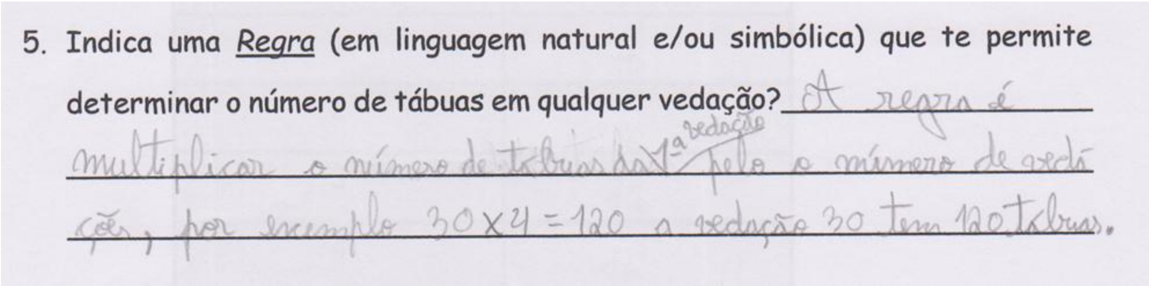


Figura 6 – Resolução apresentada pela Sílvia à questão 5 da Tarefa 2

A Filipa e o Afonso usam o contexto da figura da tarefa para descreverem uma regra geral, de natureza funcional. A Filipa apresenta inclusivamente um exemplo do número para concretizar a regra geral apresentada.



5. Indica uma *Regra* (em linguagem natural e/ou simbólica) que te permite determinar o número de tábuas em qualquer vedação? A regra é multiplicar o número de tábuas da 1ª vedação pelo o número de vedações, por exemplo 30x4=120 a vedação 30 tem 120 tábuas.

Figura 7 – Resolução apresentada pela Filipa à questão 5 da Tarefa 2

Relativamente ao tipo de representações utilizadas pelos alunos na descrição da regra geral verifica-se que os quatro alunos que responderam a esta questão usam a linguagem natural, no entanto, três deles usam também a linguagem numérica, como se expressa no quadro seguinte:

Quadro 12 – Representações utilizadas na questão 5 da Tarefa 2

Sílvia	**Filipa**	**Guilherme**	**Afonso**	**Filomena**
Linguagem natural e linguagem numérica	Linguagem natural e linguagem numérica	Linguagem natural e linguagem numérica	Linguagem natural	Não responde

Nesta questão o Afonso refere que “cada vedação tem 4 tábuas verdes e para achar o número de tábuas fazemos o número da ordem vezes 4 que é o número de tábuas por vedação”. Depreende-se que o aluno se apoia no contexto visual da tarefa para descrever a lei de formação da sequência, onde relaciona o número da vedação com o número de tábuas.

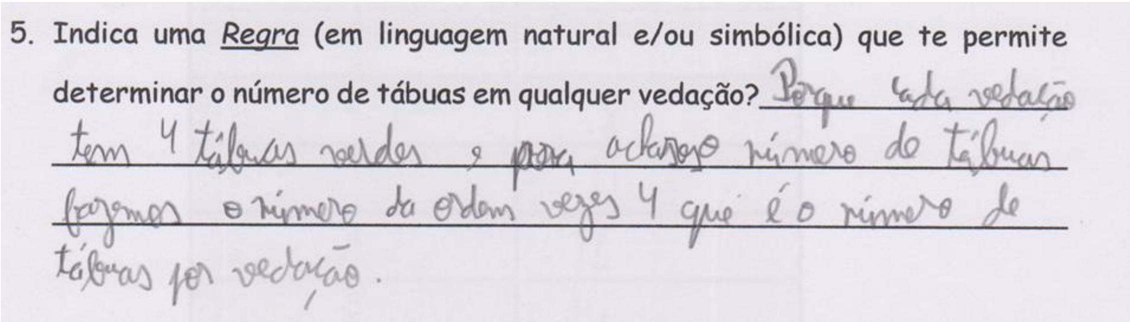

5. Indica uma *Regra* (em linguagem natural e/ou simbólica) que te permite determinar o número de tábuas em qualquer vedação? Porque cada vedação tem 4 tábuas verdes e para acharmos o número de tábuas fazemos o número da ordem vezes 4 que é o número de tábuas por vedação.

Figura 8 – Resolução apresentada pelo Afonso à questão 5 da Tarefa 2

A Filipa, por exemplo, também usa a linguagem natural mas apresenta também um exemplo para ilustrar a regra geral através da linguagem numérica.

5.2. Tarefa 3 – *Brincando com Berlindes*

A aula

Esta tarefa foi aplicada e desenvolvida numa primeira aula de 50 minutos e mais 25 minutos do segundo tempo. Houve, no entanto, necessidade de fazer uma breve revisão das conclusões da tarefa anterior, uma vez que esta permitiu a introdução da Lei de Formação de uma sequência. Pretendia com esta tarefa introduzir progressivamente a linguagem simbólica apresentando alguns exemplos. Assim durante o momento de análise e discussão das resoluções realizadas pelos alunos conduzi-os à utilização da linguagem pré-simbólica. Ainda neste momento sugeri que utilizassem a letra *n* ou outra do seu agrado, como representação da ordem, por forma a simplificarem a escrita aquando a escrita da regra geral da sequência. Nesta fase, ainda não lhes dera a conhecer a denominação de Expressão Geradora para a regra algébrica que iriam encontrar, no entanto, referi que esta expressão por conter números e também letras denominava-se *expressão algébrica*, tentando que reconhecessem a mais-valia desta expressão algébrica - exprimir e determinar qualquer termo ou ordem da sequência.

Mais uma vez, a Tarefa 3 – *Brincando com Berlindes* (anexo 4) foi lida para a turma e analisaram-se as dúvidas que os alunos apresentaram. Durante a discussão das generalizações dos alunos verificou-se que alguns deles já utilizaram expressões algébricas bem construídas, mas alguns descreveram também a regra em linguagem natural o que permite depreender que ainda sentem necessidade de explicar o significado da expressão algébrica.

Vejamos, de seguida, as estratégias de generalização que os cinco alunos selecionados apresentam, assim como a linguagem que usaram na questão 4 desta tarefa.

Estratégias e representações

Na questão 2.1 (fig.9) pretende-se que os alunos expliquem como podem calcular a quantidade de berlindes na 50.ª formação.

Explica, usando palavras, como é possível saber quantos berlindes são necessários para a construção da formação 50.

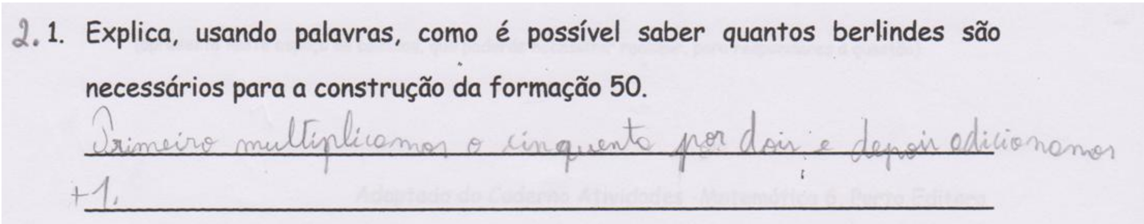
Figura 9 – Questão 2.1 da Tarefa 3

Surgiram, dois tipos de estratégias diferentes, como se indica no quadro seguinte:

Quadro 13 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 2.1 da tarefa 3

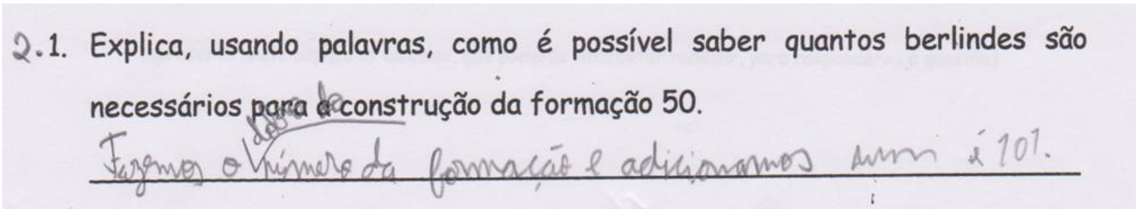
Sílvia	**Filipa**	**Guilherme**	**Afonso**	**Filomena**
Diferença: Recursiva (D_1	Diferença: Recursiva (D_1) Funcional: Raciocínio funcional (FCN)	Funcional: Raciocínio funcional (FCN)	Funcional: Raciocínio funcional (FCN)	Não responde mas na tabela apresenta: Diferença: Recursiva (D_1)

Os alunos referidos, exceto a Filipa, ou utilizam a diferença recursiva (D_1) ou o raciocínio funcional (FCN) conseguindo assim descrever a Lei de Formação da sequência numérica. As estratégias utilizadas pela Filipa e pelo Diogo na questão 2.1 é suportada pela resolução da questão 2, onde estes alunos preenchem uma tabela, baseando-se na estratégia de raciocínio funcional (FCN). A Filipa para além desta estratégia, continua a sequência com base na diferença entre termos consecutivos, recorrendo assim também a uma diferença recursiva (D_1).


2.1. Explica, usando palavras, como é possível saber quantos berlindes são necessários para a construção da formação 50.

Primeiro multiplicamos o cinquento por dois e depois adicionamos +1.

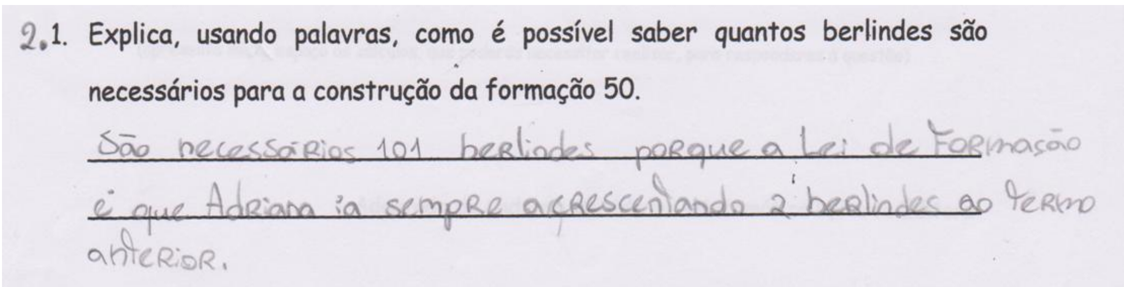
Figura 10 – Resolução apresentada pelo Guilherme à questão 2.1 da Tarefa 3


2.1. Explica, usando palavras, como é possível saber quantos berlindes são necessários para a construção da formação 50.

Fazemos o número da formação e adicionamos um é 101.

Figura 11 – Resolução apresentada pelo Afonso à questão 2.1 da Tarefa 3

A Sílvia utiliza o mesmo tipo de estratégia, mas ao contrário da Filomena, apresenta a quantidade correta de berlindes (101).


2.1. Explica, usando palavras, como é possível saber quantos berlindes são necessários para a construção da formação 50.

São necessários 101 berlindes porque a Lei de Formasão é que Adriana ia sempre acrescentando 2 berlindes ao termo anterior.

Figura 12 – Resolução apresentada pela Sílvia à questão 2.1 da Tarefa 3

Nesta tarefa incluiu-se uma questão envolvendo raciocínio inverso. Neste caso concreto, pretende-se que os alunos verifiquem se 201 é termo da sequência.

O João, um amigo da Adriana, afirmou que existe uma formação com 201 berlindes. Concordas? Explica como obtiveste a tua resposta.

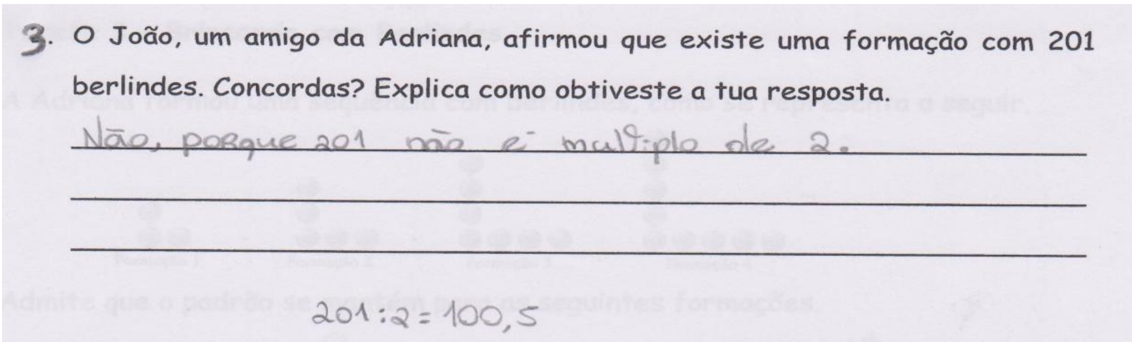
Figura 13 – Questão 3 da Tarefa 3

Os quatro alunos, que conseguiram resolver a questão, usaram diferentes tipos de estratégia nesta questão.

Quadro 14 – Estratégias em questões de raciocínio inverso utilizadas nas questões 3 da Tarefa 3

Sílvia	**Filipa**	**Guilherme**	**Afonso**	**Filomena**
Resposta errada	Diferença - Múltiplo da diferença com ajuste (D_{3})	Explícita – Por exaustão a partir de uma regra (EE)	Explícita - Operação inversa (EOI)	Não responde

Nesta questão, a Sílvia dá uma resposta errada embora anteriormente, na questão 2, tenha preenchido corretamente a tabela com diversos termos da sequência até à ordem 20.

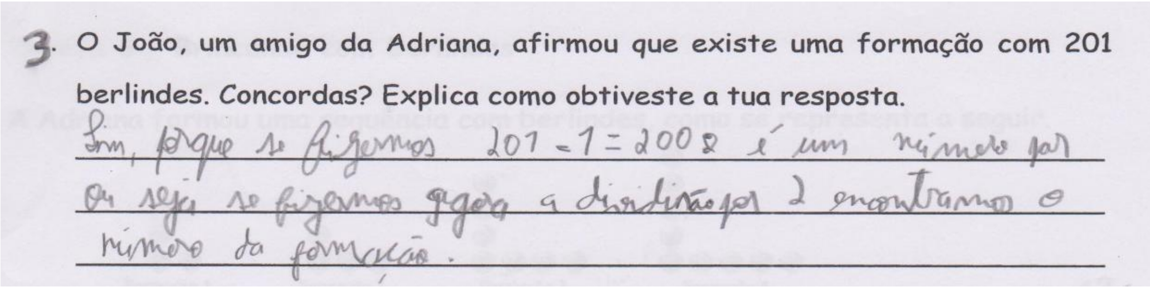

3. O João, um amigo da Adriana, afirmou que existe uma formação com 201 berlindes. Concordas? Explica como obtiveste a tua resposta.

Não, porque 201 não é multiplo de 2.

201 : 2 = 100,5

Figura 14 – Resposta Incorreta apresentada pela Sílvia à questão 3 da Tarefa 3

O Afonso utiliza operações inversas para verificar se um valor é termo da sequência, a partir de uma regra geral o que lhe permitiu o cálculo imediato do valor da variável dependente tendo conhecimento da variável independente. Recorre assim á estratégia Explícita - Operação inversa (EOI). Da resolução apresentada pelo aluno, depreende-se que conseguiu perceber a existência de uma regra geral que relaciona a ordem com o termo da sequência.

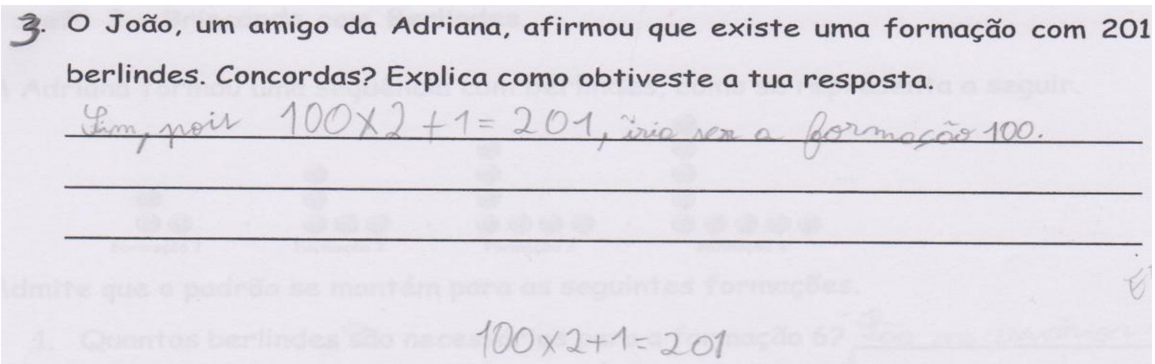


3. O João, um amigo da Adriana, afirmou que existe uma formação com 201 berlindes. Concordas? Explica como obtiveste a tua resposta.

Sim, porque se fizermos 201 - 1 = 200 é um número par ou seja, se fizermos agora a divisão por 2 encontramos o número da formação.

Figura 15 – Resolução apresentada pelo Afonso à questão 3 da Tarefa 3

Quanto ao Guilherme, o aluno parece usar uma estratégia explícita por exaustão a partir de uma regra (EE) como confirmação do valor encontrado. O aluno baseia-se na regra geral o que lhe permite efetuar o cálculo imediato do valor da variável dependente conhecendo a independente e, por exaustão, verifica se 201 é termo da sequência.



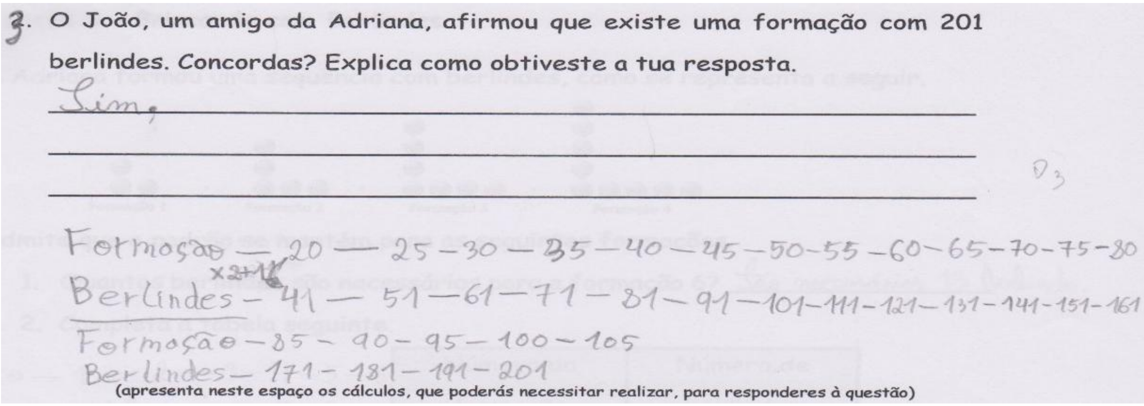
3. O João, um amigo da Adriana, afirmou que existe uma formação com 201 berlindes. Concordas? Explica como obtiveste a tua resposta.

Sim, pois 100×2+1= 201, iria ser a formação 100.

100×2+1= 201

Figura 16 – Resolução apresentada pelo Guilherme à questão 3 da Tarefa 3

Já a resolução da Filipa distingue-se das anteriores na medida em que a aluna parece já reconhecer a relação funcional entre cada termo e a respetiva ordem, mas necessita indicar as ordens e termos da sequência de cinco em cinco até chegar ao valor procurado. Evidencia-se assim que a aluna para resolver esta esta questão utiliza uma estratégia de diferença entre termos consecutivos baseando-se no fator multiplicativo entre os mesmos. Utiliza a diferença – múltiplo da diferença com ajuste (D_3) pois considera um produto de dois fatores: o número de berlindes acrescentados em cada formação (2 berlindes) e o número da própria figura, fazendo um ajuste ao resultando, adicionando um berlinde.


3. O João, um amigo da Adriana, afirmou que existe uma formação com 201 berlindes. Concordas? Explica como obtiveste a tua resposta.

Sim,

D_3

Formação — 20 — 25 – 30 — 35 — 40 — 45 – 50 – 55 – 60 – 65 – 70 – 75 – 80

x2+1

Berlindes — 41 — 51 — 61 — 71 — 81 — 91 — 101 – 111 – 121 – 131 – 141 – 151 – 161

Formação — 85 – 90 – 95 – 100 – 105

Berlindes — 171 – 181 – 191 – 201

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

Figura 17 – Resolução apresentada pela Filipa à questão 3 da Tarefa 3

Após o trabalho efetuado nas questões anteriores, foi com bastante facilidade que os alunos determinaram uma regra geral. Mais uma vez a Filomena foi a única que não conseguiu responder à questão.

Indica uma <u>*Regra*</u> (em linguagem natural e/ou simbólica), que te permita determinar o número de berlindes de qualquer formação.

Figura 18 – Questão 4 da Tarefa 3

Quatro alunos conseguem escrever uma regra geral explícita, baseando-se no contexto numérico para obter uma regra geral.

Quadro 15 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 4 da tarefa 3

Sílvia	Filipa	Guilherme	Afonso	Filomena
Regra geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Não responde

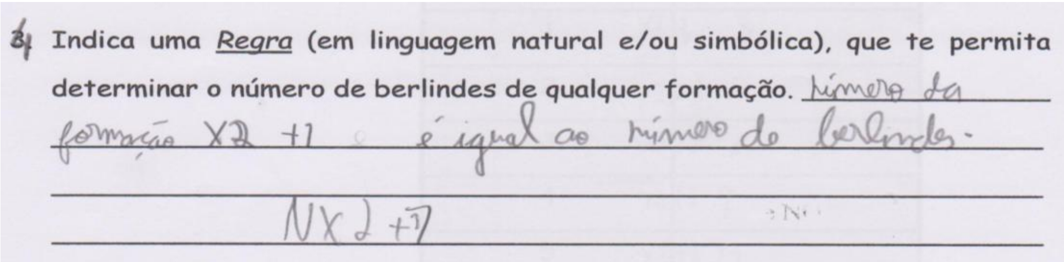

4. Indica uma *Regra* (em linguagem natural e/ou simbólica), que te permita determinar o número de berlindes de qualquer formação. número da formação X2 +1 é igual ao número de berlindes.
N X 2 +1

Figura 19 – Resolução apresentada pelo Afonso à questão 4 da Tarefa 3

Relativamente ao tipo de representações utilizadas nesta questão, observa-se que os alunos adotam linguagens variadas. Verifica-se a utilização da simbólica alfanumérica e natural em dois alunos, que no caso do Afonso recorre aos dois tipos de representações. Apenas um aluno utiliza a linguagem pré-simbólica (sincopada).

Quadro 16 – Representações utilizadas na questão 4 da Tarefa 3

Sílvia	Filipa	Guilherme	Afonso	Filomena
Linguagem simbólica alfanumérica	Linguagem natural	Linguagem pré-simbólica (sincopada)	Linguagem simbólica alfanumérica e Linguagem natural	Não responde

A expressão geradora que a Sílvia escreveu reproduz a sequência de duas operações que são produzidas sobre o do número da formação (a ordem), evidente pelo facto de ter colocado o *n* em primeiro lugar nessa expressão algébrica.

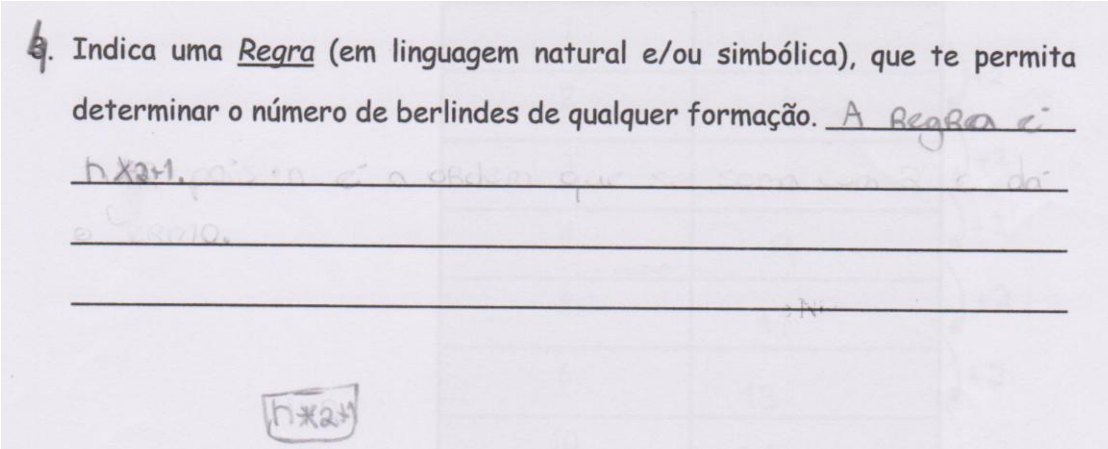


Figura 20 – Resolução apresentada pela Sílvia à questão 4 da Tarefa 3

O Guilherme, por sua vez, utiliza a linguagem pré-simbólica (sincopada) para descrever a regra geral – Expressão Geradora – que aparece assim escrita como uma fórmula, para a qual faz uma legenda explicitando o significado de "nº", como abreviatura do número da formação, ou seja, da ordem. O Afonso e a Sílvia utilizam a linguagem simbólica alfanumérica para descrever a regra geral, tendo o Afonso enunciado a mesma.

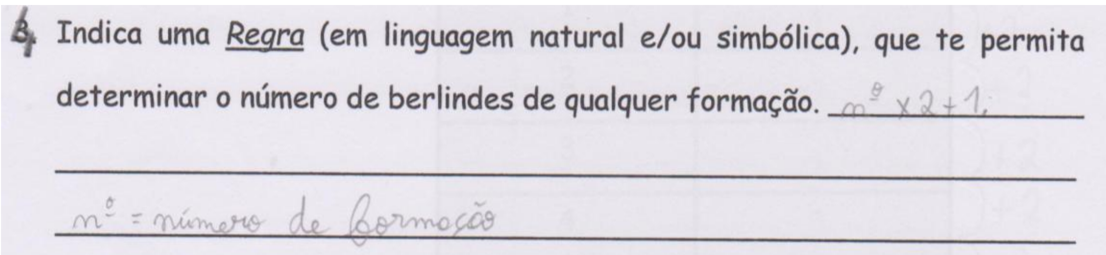


Figura 21 – Resolução apresentada pelo Guilherme à questão 4 da Tarefa 3

5.3. Tarefa 4 – *Os Fósforos*

A aula

Esta tarefa (anexo 4), tal como a anterior, foi planeada ser aplicada e desenvolvida numa primeira aula de 50 minutos e usando mais 25 minutos do segundo tempo. A tarefa começou por ser lida, por mim, para a turma. Como não se colocaram dúvidas, os alunos iniciaram a sua realização.

Como na tarefa 3 foi introduzida a linguagem simbólica associada à expressão geradora, os alunos demonstraram muito à vontade na realização desta tarefa, pelo que, em apenas 30 minutos de aula todos os grupos conseguiram realizá-la com muita rapidez. De início, pensei que os alunos se tinham precipitado nas suas respostas, mas durante a análise e discussão da tarefa verifiquei que a tarefa anterior se revelou de extrema importância para a compreensão desta. Durante a discussão das generalizações dos alunos, verificou-se que maioritariamente utilizaram a expressão geradora como modalidade preferencial, na procura das respostas às questões da tarefa. No entanto, alguns sentem necessidade de descreverem também a expressão geradora em linguagem natural, o que permite depreender que ainda sentem necessidade de a complementar. Os últimos 20 minutos de aula foram suficientes para os registos de conclusões resultantes da sua discussão e análise.

De seguida, analisarei as estratégias de generalização que os cinco alunos selecionados apresentam, assim como as representações que usaram na questão 2 d) desta tarefa.

Estratégias e representações

Na questão 2 a) (fig.22) pretende-se que os alunos preencham uma tabela tendo por base uma sequência pictórica, onde se relacionava o número de fósforos em cada figura com o número da figura.

2.A tabela seguinte refere-se a figuras da mesma sequência.

a)Completa a tabela.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	10
Número de segmentos	5	8	11	?	?	?	?

Figura 22 – Questão 2 a) da Tarefa 4

No preenchimento desta tabela, a maioria dos alunos utiliza duas estratégias diferentes. Para os termos próximos (até 6) a estratégia que seguem continuar a sequência de forma recursiva, baseando-se na diferença entre termos consecutivos (D1), no entanto, a maioria dos alunos utiliza uma outra estratégia quando pretende calcular um termo mais distante. Vejamos:

Quadro 17 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 2.a) da tarefa 4

Termos até à Ordem 6

Sílvia	**Filipa**	**Guilherme**	**Afonso**	**Filomena**
Diferença - Recursiva (D_1)	Diferença - Recursiva (D_1)	Diferença - Recursiva (D_1)	Diferença - Recursiva (D_1)	Diferença - Recursiva (D_1)

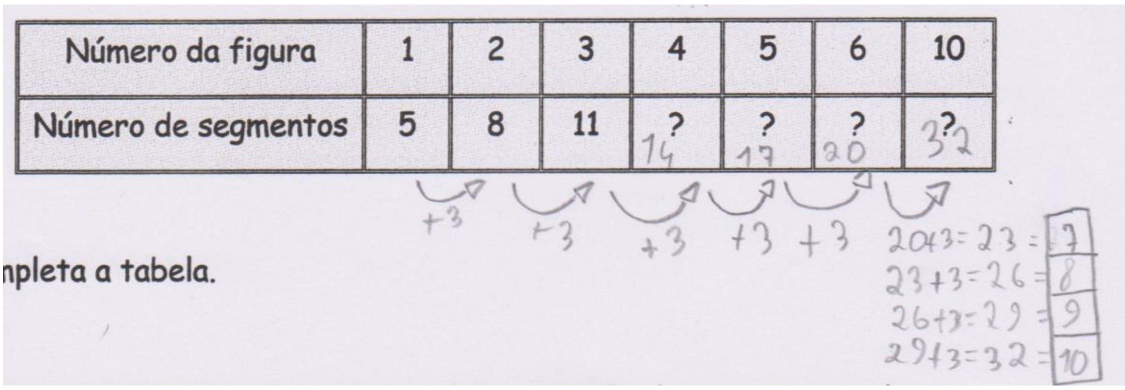
Quadro 18 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 2.a) da tarefa 4

Termo de Ordem 10

Sílvia	**Filipa**	**Guilherme**	**Afonso**	**Filomena**
Funcional: Raciocínio funcional(FCN)	Funcional: Raciocínio funcional(FCN)	Diferença - Recursiva (D_1)	Funcional: Raciocínio funcional(FCN)	Funcional: Raciocínio funcional(FCN)

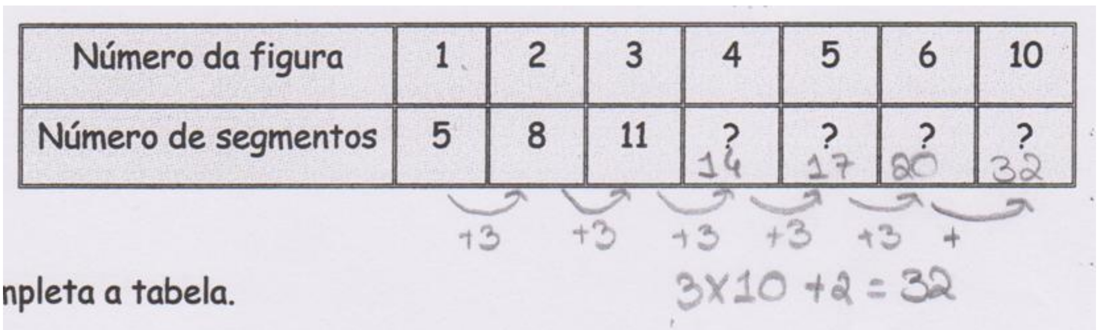
Nesta questão, quando recorrem a uma estratégia de Raciocínio funcional (FCN) não é possível saber, se os alunos se basearam diretamente nos números ou se visualizaram a relação na figura de ordem quatro que desenharam na questão 1.

Aqui todos os alunos, exceto o Guilherme, optam por usar o contexto numérico para determinar o termo de ordem 10 a partir da respetiva ordem adotando a estratégia de raciocínio funcional (FCN) para calcular um termo mais distante. O Guilherme decide continuar de forma recursiva o preenchimento do último termo, baseando-se na diferença entre termos consecutivos. O aluno representa uma continuação da tabela como auxílio na procura do termo de ordem 10, da sequência.



Número da figura	1	2	3	4	5	6	10
Número de segmentos	5	8	11	? 14	? 17	? 20	? 32

Figura 23 – Resolução apresentada pelo Guilherme à questão 2 a) da Tarefa 4



Número da figura	1	2	3	4	5	6	10
Número de segmentos	5	8	11	? 14	? 17	? 20	? 32

Figura 24 – Resolução apresentada pela Filomena à questão 2 a) da Tarefa 4

Na questão 2 c) desta tarefa, era pedido aos alunos que determinassem um termo distante.

2 c) Por quantos fósforos é formada a figura 65? Explica o teu raciocino.

Figura 25 – Questão 2 c) da Tarefa 4

A estratégia utilizada por todos os alunos na questão 2 c) é suportada pela resolução da questão 2 a), onde todos à exceção do Guilherme, já tinham recorrido ao raciocínio funcional. Nesta questão voltam a utilizar o contexto numérico, neste caso para determinar o termo de ordem 65, a partir da respetiva ordem (FCN).

Quadro 19 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 2 c) da tarefa 4

Sílvia	Filipa	Guilherme	Afonso	Filomena
Funcional – Raciocínio Funcional (FCN)	Funcional – Raciocínio Funcional (FCN)	Funcional – Raciocínio Funcional (FCN)	Funcional – Raciocínio Funcional (FCN)	Funcional – Raciocínio Funcional (FCN)

A estratégia usada por todos os alunos é ilustrada no caso da Sílvia, na figura seguinte. A aluna baseia-se no contexto numérico e calcula diretamente o termo de ordem 65 usando a relação que encontrou entre o termo e a respetiva ordem.

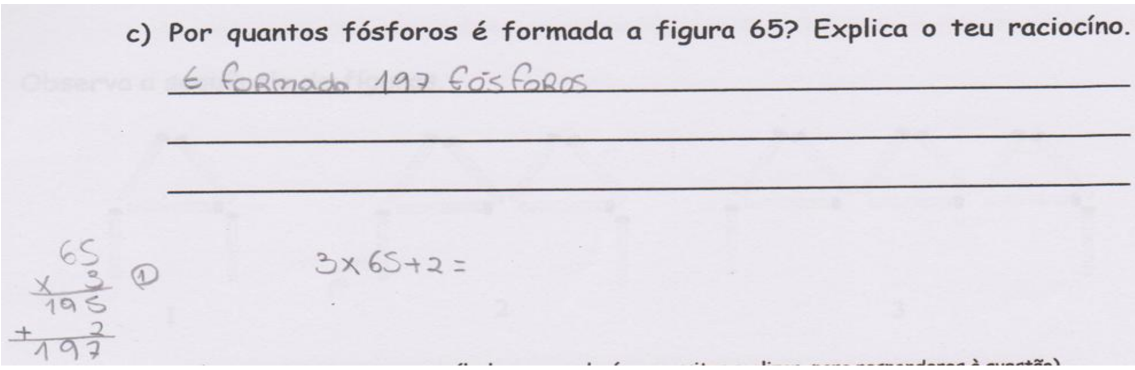
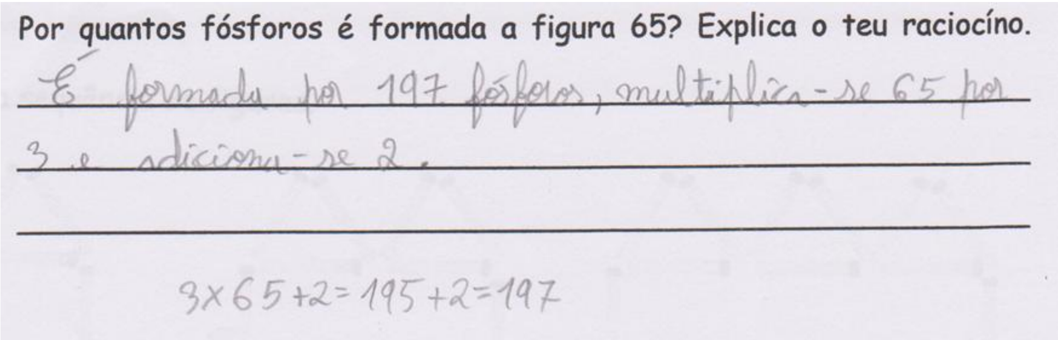


Figura 26 – Resolução apresentada pela Sílvia à questão 2.c) da Tarefa 4

A Filipa utiliza o mesmo tipo de estratégia, mas faz o registo da regra em que se baseou para concluir que a figura 65 tem 197 fósforos. Refere que o fator multiplicativo (3) como o número de fósforos que acrescenta em cada formação, fazendo referência ao ajuste - adicionar dois fósforos.



Por quantos fósforos é formada a figura 65? Explica o teu raciocíno.

É formada por 197 fósforos, multiplica-se 65 por 3 e adiciona-se 2.

$3 \times 65 + 2 = 195 + 2 = 197$

Figura 27 – Resolução apresentada pela Filipa à questão 2.c) da Tarefa 4

Após a realização das questões anteriores foi com facilidade que os alunos determinaram uma regra geral. Repare-se que a Filomena era a única que até ao momento ainda não conseguia encontrar uma Expressão Geradora. No entanto, esta tarefa revelou-se de extrema importância para a aluna, uma vez que conseguiu ultrapassar as dificuldades anteriormente registadas. A estratégia adotada por todos os alunos para indicar a Expressão Geradora, foi a da regra geral explícita com o uso do contexto numérico (EFCN).

2 d) Indica a Expressão Geradora desta sequência.

Figura 28 – Questão 2 d) da Tarefa 4

Os alunos conseguem escrever a Expressão Geradora através da regra geral explícita, adotando a mesma estratégia de generalização. Todos os alunos usam o mesmo tipo de estratégia na determinação da regra, apoiando-se nas relações numéricas identificadas:

Quadro 20 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 2 d) da tarefa 4

Sílvia	Filipa	Guilherme	Afonso	Filomena
Regra geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)

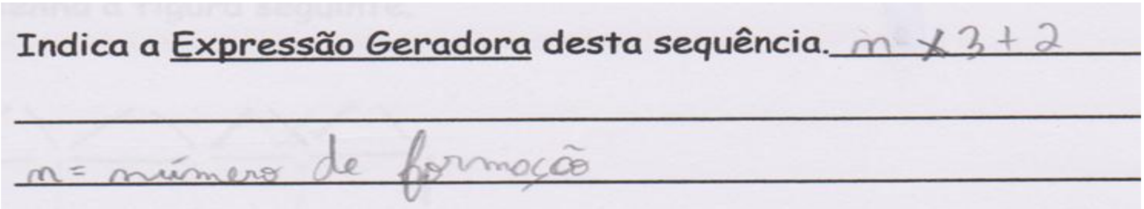


Figura 29 – Resolução apresentada pelo Guilherme à questão 2 d) da Tarefa 4

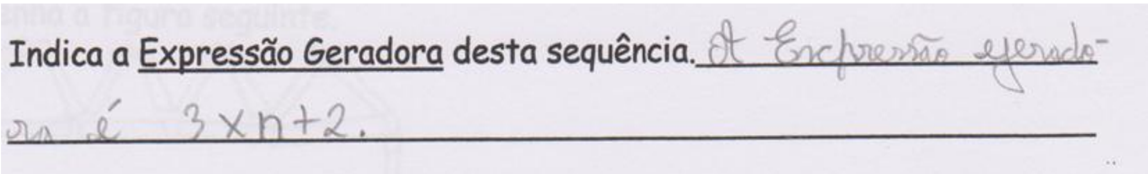


Figura 30 – Resolução apresentada pela Filipa à questão 2 d) da Tarefa 4

Relativamente ao tipo de representações utilizadas nesta questão, observa-se que todos os alunos adotam a linguagem simbólica alfanumérica.

Quadro 21 – Representações utilizadas na questão 2 d) da Tarefa 4

Sílvia	Filipa	Guilherme	Afonso	Filomena
Linguagem simbólica alfanumérica	Linguagem simbólica alfanumérica	Linguagem simbólica alfanumérica	Linguagem simbólica alfanumérica	Linguagem simbólica alfanumérica

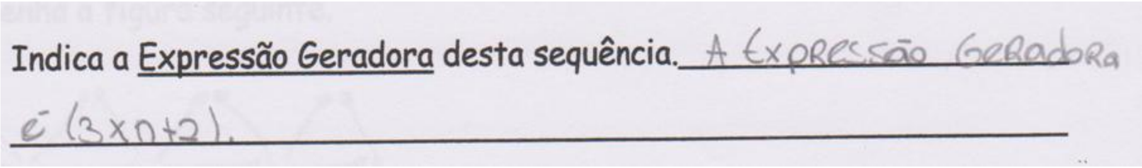

Indica a Expressão Geradora desta sequência. A Expressão Geradora é (3xn+2).

Figura 31 – Resolução apresentada pela Sílvia à questão 2 d) da Tarefa 4

Através de linguagem simbólica alfanumérica os alunos explicitam a regra geral da sequência, apoiando-se no contexto numérico da mesma (EFCN), como foi percetível pela forma como responderam às questões anteriores. O Guilherme faz uma legenda explicitando o significado de “n”.

5.4. Tarefa 5 – *Parques de Estacionamento*

A aula

A tarefa 5 (anexo 4) inicia a transição para a Proporcionalidade Direta na Unidade de Ensino. Apela-se aos alunos o uso dos conhecimentos adquiridos anteriormente para que nesta tarefa estabeleçam de forma adequada relações entre as grandezas apresentadas (tempo e preço), sendo esta a primeira tarefa da experiência de ensino em que não é apresentada uma sequência pictórica.

Valores pagos por clientes de dois Parques de Estacionamento, ao longo de um dia.

Parque *Carro Aqui*						
Tempo (h)	1	2	3	4	5	6
Preço (€)	2	4	6	8	10	12

Parque *Carro Acolá*						
Tempo (h)	1	2	3	4	5	6
Preço (€)	2	5	7	9	12	14

Figura 32 – Tabelas da Tarefa 5

Com a resolução desta tarefa pretendia-se que os alunos tivessem um primeiro contacto com a noção de grandezas diretamente proporcionais e não diretamente proporcionais, sendo capazes de enunciar diferenças entre estas, assim como explicar o significado do invariante (constante de proporcionalidade) e, ainda, indicarem uma regra geral, utilizando a linguagem natural e/ou simbólica, para expressar a relação de proporcionalidade direta.

Os alunos não tiveram dificuldade na realização das questões desta tarefa, no entanto verificou-se uma certa tendência para darem respostas sem grande argumentação matemática. Tal como na tarefa anterior, os alunos demonstraram muito à vontade na realização da mesma, pelo que, em menos de 30 minutos de aula todos os grupos a concluíram sem grandes dificuldades. Mais uma vez, inicialmente pensei que se tinham precipitado nas suas respostas, mas durante a análise e discussão da mesma, os receios ficaram dissipados. Sendo assim, os últimos cerca de 20 minutos de aula, foram suficientes para os registos de conclusões, pelos alunos, resultantes da sua discussão e análise.

Durante a discussão coletiva das suas resoluções, o termo "proporcionais" foi usado espontaneamente por alguns alunos da turma. A grande maioria dos alunos percebeu que no parque *Carro Aqui* verificava-se uma relação constante entre as duas grandezas (custo e tempo) e que o mesmo não se observava no parque *Carro Acolá.* Foi, assim, uma tarefa que se revelou adequada para introduzir a noção de proporcionalidade direta, pois apesar de os alunos terem verbalizado o termo de proporcionalidade, que conheciam intuitivamente tinham naturalmente dificuldade em explicar o seu significado. Esta tarefa foi uma mais-valia para introduzir o significado de duas grandezas serem ou não diretamente proporcionais, tal como se evidencia pelas resoluções dos alunos.

Distinguir uma situação de proporcionalidade direta de não direta

Na questão 2 (fig. 33) pretendia-se que os alunos percebessem em qual das duas situações - "Parque Carro Aqui" e "Parque Carro Acolá" – existe uma relação de proporcionalidade direta.

2. Mantinhas as respostas dadas na questão 1, se se tratasse do Parque *Carro Acolá*? Porquê?

Figura 33 – Questão 2 da Tarefa 5

Quatro dos cinco alunos, conseguem identificar que no Parque Carro Acolá não existe uma relação de proporcionalidade direta. Usaram o mesmo tipo de estratégia que usaram na questão 1, apoiando-se nas relações numéricas dentro da mesma grandeza (de dobro e de triplo) identificadas nessa questão para confirmar se as mesmas se verificam nesta situação.

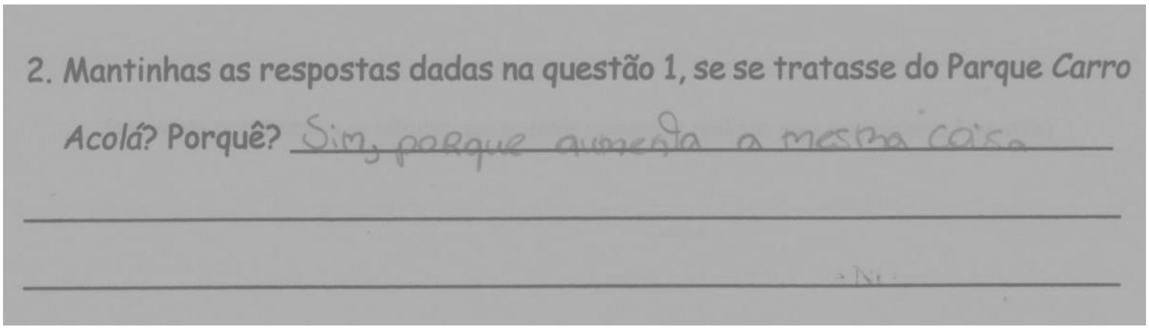
Nesta questão apenas a Sílvia respondeu incorretamente, referindo que mantinha a mesma resposta para o parque "*Carro Acolá*".

Vejamos:

Quadro 22 – Distinguir uma situação de proporcionalidade direta de não direta

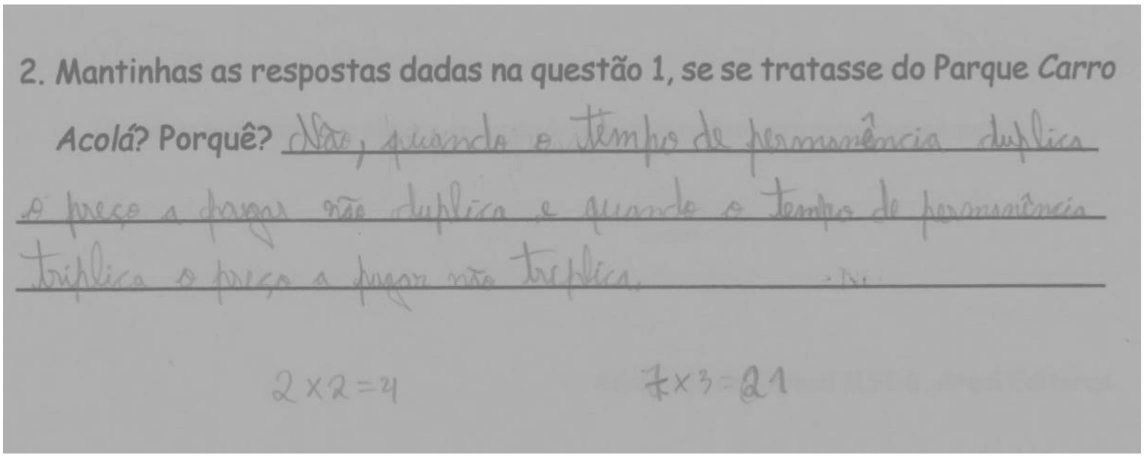
Questão 2 da tarefa 5

Sílvia	**Filipa**	**Guilherme**	**Afonso**	**Filomena**
Não (N)	Sim (S)	Sim (S)	Sim (S)	Sim (S)



2. Mantinhas as respostas dadas na questão 1, se se tratasse do Parque *Carro Acolá*? Porquê? Sim, porque aumenta a mesma coisa

Figura 34 – Resolução apresentada pela Filipa à questão 2 da Tarefa 5



2. Mantinhas as respostas dadas na questão 1, se se tratasse do Parque *Carro Acolá*? Porquê? Não, quando o tempo de permanência duplica o preço a pagar não duplica e quando o tempo de permanência triplica o preço a pagar não triplica.

2×2=4 7×3=21

Figura 35 – Resolução apresentada pela Sílvia à questão 2 da Tarefa 5

Atribuir sentido à constante de proporcionalidade

Identificar a constante de proporcionalidade e atribuir-lhe significado em contexto eram os objetivos que se pretendiam atingir com as questões 3 e 4. Todos os alunos identificam a constante de proporcionalidade, no entanto o significado da mesma é algo que se revela difícil para alguns alunos. A Sílvia identifica a constante, mas dá uma resposta incompleta referindo apenas que "Sim, porque é o dobro".

Quadro 23 – *Atribuir sentido à constante de proporcionalidade*

Questões 3 e 4 da tarefa 5

Sílvia	**Filipa**	**Guilherme**	**Afonso**	**Filomena**
Identifica a Constante (IC) Resposta incompleta	Identifica a Constante (IC) Atribui significado em Contexto (ASC)	Identifica a Constante (IC) Sem informação	Identifica a Constante (IC) Atribui significado em Contexto (ASC)	Identifica a Constante (IC) Atribui significado em Contexto (ASC)

Há três alunos (Filipa, Afonso e Filomena) que indicam a existência de uma relação de dobro entre o preço e uma hora de estacionamento no Parque Carro Aqui, evidenciando atribuírem sentido à constante de proporcionalidade. Em particular, o Afonso evidencia como se pode determinar o preço a pagar por qualquer período de estacionamento, quando diz que faz "o dobro do tempo" e exemplifica o custo para 6 horas de estacionamento.

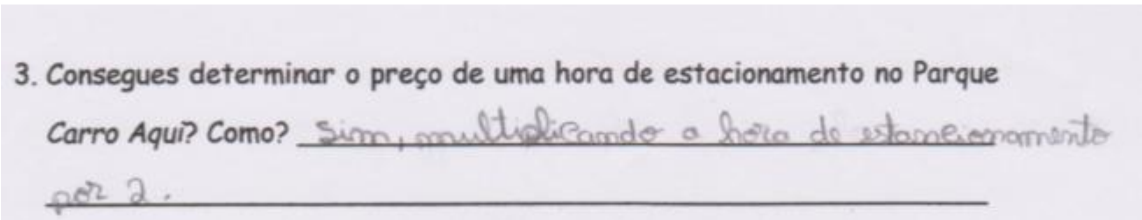

3. *Consegues determinar o preço de uma hora de estacionamento no Parque Carro Aqui? Como?* Sim, multiplicando a hora de estacionamento por 2.

Figura 36 – Resolução apresentada pela Filipa à questão 3 da Tarefa 5

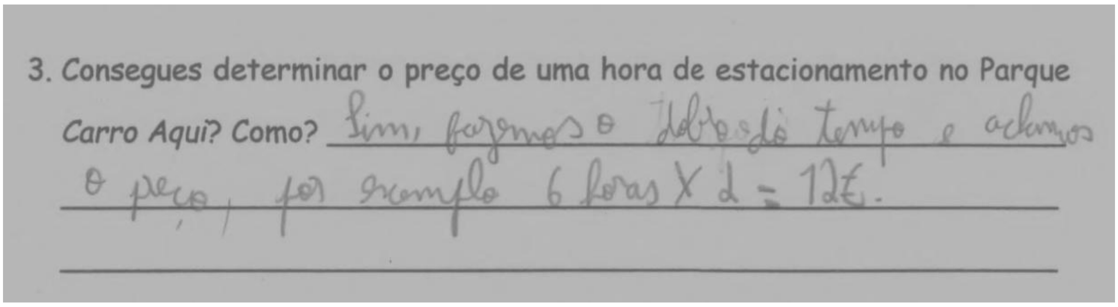

3. Consegues determinar o preço de uma hora de estacionamento no Parque Carro Aqui? Como? Sim, fazemos o dobro do tempo e achamos o preço, por exemplo 6 horas X 2 = 12€.

Figura 37 – Resolução apresentada pelo Afonso à questão 3 da Tarefa 5

Estratégias e Representações

Após a realização das questões anteriores foi com facilidade que os alunos determinaram uma regra geral, no entanto apenas dois alunos indicaram uma Expressão Geradora, sendo a estratégia de generalização a da regra geral explícita com o uso do contexto numérico (EFCN). Na questão 4 era pedida uma regra que representasse a relação constante entre as duas variáveis, onde se relacionasse o tempo de estacionamento com o preço a pagar, identificando em qual dos dois parques era possível aplicar-se essa regra geral.

Quadro 24 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 4 da tarefa 5

Sílvia	**Filipa**	**Guilherme**	**Afonso**	**Filomena**
Resposta incompleta	Regra geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)

Quatro dos alunos reconhecem a relação funcional entre as grandezas horas e preço, fazendo uma generalização e para isso recorrem ao contexto numérico para determinar a regra geral (EFCN). A Sílvia apenas refere que é possível escrever uma regra para o parque “*Carro Aqui”*, mas não a enuncia.

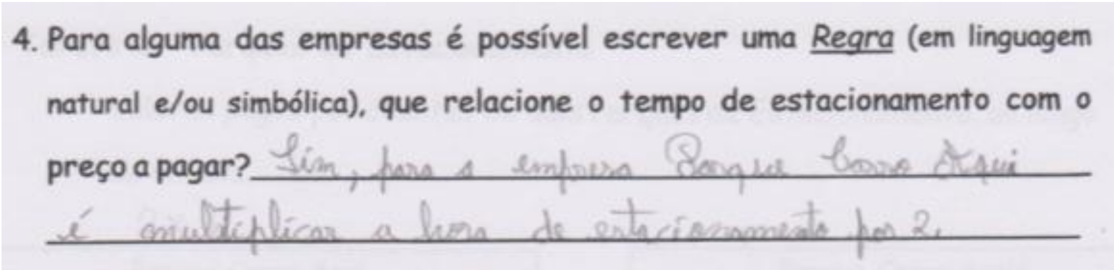

4. Para alguma das empresas é possível escrever uma Regra (em linguagem natural e/ou simbólica), que relacione o tempo de estacionamento com o preço a pagar? Sim, para a empresa Parque Carro Aqui é multiplicar a hora de estacionamento por 2.

Figura 38 – Resolução apresentada pela Filipa à questão 4 da Tarefa 5

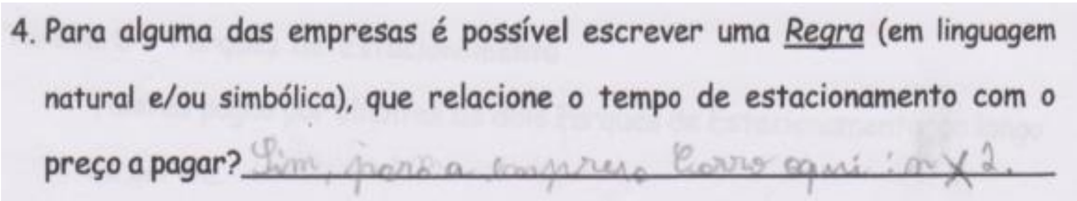
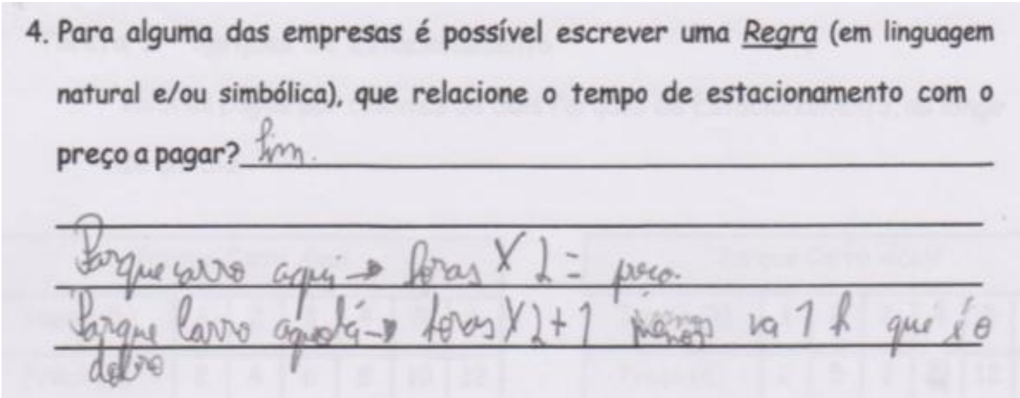

4. Para alguma das empresas é possível escrever uma Regra (em linguagem natural e/ou simbólica), que relacione o tempo de estacionamento com o preço a pagar? Sim, para a empresa Carro aqui: n × 2.

Figura 39 – Resolução apresentada pelo Guilherme à questão 4 da Tarefa 5

Relativamente ao tipo de representações utilizadas nesta questão, observa-se que os alunos adotam a linguagem natural ou simbólica, por vezes, complementada com outro tipo de representações e, um dos alunos utiliza também a linguagem pré-simbólica - sincopada.

Quadro 25 – Representações utilizadas na questão 4 da Tarefa 5

Sílvia	**Filipa**	**Guilherme**	**Afonso**	**Filomena**
Resposta não adequada	Linguagem natural	Linguagem simbólica	Linguagem Pré-simbólica sincopada	Linguagem Natural


4. Para alguma das empresas é possível escrever uma Regra (em linguagem natural e/ou simbólica), que relacione o tempo de estacionamento com o preço a pagar? Sim.

Parque carro aqui → horas X 2 = preço.

Parque Carro acolá → horas X 2+1 porque vai 1 h que é dobro

Figura 40 – Resolução apresentada pelo Afonso à questão 4 da Tarefa 5

O Afonso mistura a linguagem corrente com símbolos criando uma fórmula, recorrendo assim a uma linguagem sincopada. Verifica-se também que tenta arranjar uma expressão geradora que relacione as duas grandezas, para a situação do parque "*Carro Acolá*", não se apercebendo de que a mesma não se aplica a todos os valores da tabela.

5.5. Tarefa 7 – *A Joaninha*

A aula

Nesta tarefa pretendia-se que os alunos distinguissem uma relação de proporcionalidade direta de outra que não o é, investigando as relações numéricas que envolvem duas situações que apresentam o mesmo contexto, reconhecessem a relação de covariação e invariância que envolve a relação de proporcionalidade direta, evidenciando a sua natureza multiplicativa. Esta tarefa permitiu reconhecer a propriedade fundamental das proporções e os termos associados a uma proporção, assim como, ler a razão e a proporção. Para isto, é fundamental que, por um lado, os alunos compreendam a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta e, por outro lado, sejam confrontados com problemas que contrariem a "ilusão da linearidade".

Inicialmente, estava previsto desenvolver a tarefa em duas aulas de 50 minutos, em que a discussão e síntese ocupariam os últimos trinta minutos da segunda aula mas devido à extensão da tarefa foram utilizados ainda os primeiros quinze minutos da aula seguinte. Devido a este facto, foi necessário iniciar a aula seguinte com a síntese desta Tarefa. Esta tarefa tinha como base de exploração duas tabelas (fig.41) onde estava registado a distância percorrida por duas joaninhas em determinados instantes.

Resultados da Alice				
Tempo (s)	8	16	24	38
Distância (cm)	2	4	6	9

Tabela 1

Resultados da Mafalda				
Tempo (s)	5	10	15	20
Distância (cm)	4	8	12	16

Tabela 2

Figura 41 – Tabelas da tarefa 7

Os alunos não tiveram dificuldade na realização das duas questões iniciais da tarefa, mas o mesmo não se verificou nas duas últimas questões. Na questão 3 era solicitado a determinação de um valor omisso e na questão 4 era pedida uma regra para a relação entre as duas variáveis – tempo gasto e distância da joaninha da Mafalda, uma vez que só nesta situação se verificava a existência de uma proporcionalidade direta.

Distinguir uma situação de proporcionalidade direta de não direta

Na questão 1, apenas uma aluna respondeu incorretamente, referindo que a situação onde se verificava proporcionalidade direta era nos resultados da Alice.

1.Qual das duas tabelas representa uma relação de proporcionalidade direta? Explica porquê?

Figura 42 – Questão 1 da Tarefa 7

Quadro 26 – Distinguir uma situação de proporcionalidade direta de não direta

	Sílvia	Filipa	Guilherme	Afonso	Filomena
Resultados da Alice	Não (N)	Sim (S)	Sim (S)	Sim (S)	Sim (S)
Resultados da Mafalda	Não (N)	Sim (S)	Sim (S)	Sim (S)	Sim (S)

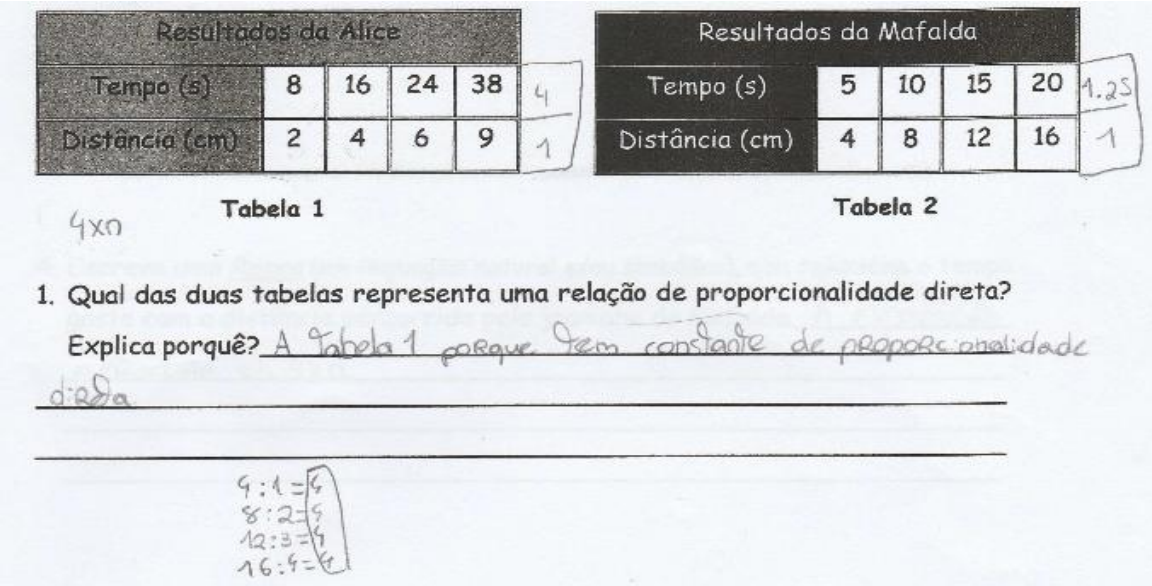
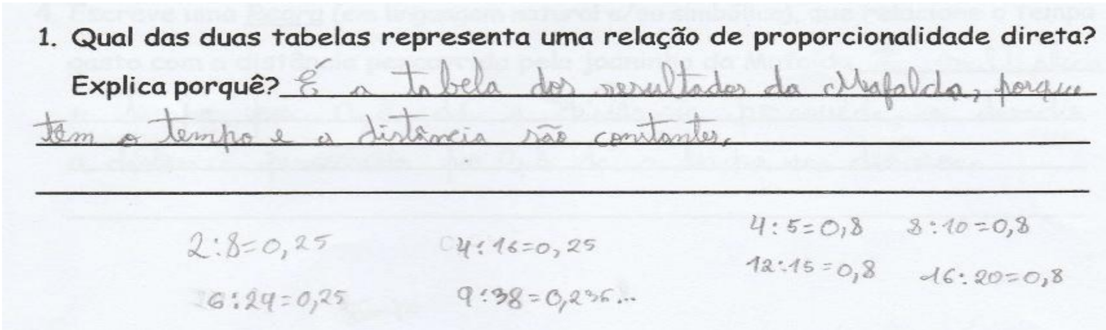


Figura 43 – Resolução apresentada pela Sílvia à questão 1 da Tarefa 7

Todos os alunos, à execção da Sílvia responderam corretamente a esta questão. A aluna completa ambas as tabelas, no sentido de encontrar a constante de proporcionalidade e, assim identificar a existência ou não de proporcionalidade direta, numa das tabelas. No entanto observa-se que o que calcula é o inverso da constante de proporcionalidade. E apesar de encontrar o valor 4, na tabela da Alice, não se apercebe que o mesmo não é constante em todas as situações, acabando por retirar uma conclusão errada. Para a situação de proporcionalidade direta, a Sílvia também indica a razão unitária mas talvez por se tratar de um valor não inteiro ou porque já tinha indicado a tabela 1 como sendo de proporcionalidade direta (a questão da tarefa indiciava que apenas uma das situações era de proporcionalidade direta, ao mencionar "Qual das duas tabelas representa uma situação de proporcionalidade direta?") acaba por indicar a situação da tabela 1.


1. Qual das duas tabelas representa uma relação de proporcionalidade direta? Explica porquê? É a tabela dos resultados da Mafalda, porque tem o tempo e a distancia são contantes.

2:8=0,25 4:16=0,25 4:5=0,8 8:10=0,8

6:24=0,25 9:38=0,236... 12:15=0,8 16:20=0,8

Figura 44 – Resolução apresentada pela Filipa à questão 1 da Tarefa 7

A Filipa procura quer nos resultados obtidos pela Alice, quer nos resultados obtidos pela Mafalda uma constante de proporcionalidade calculando a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto. Acaba por verificar que apenas existe essa constante no caso da Mafalda, apresentando uma resposta correta.

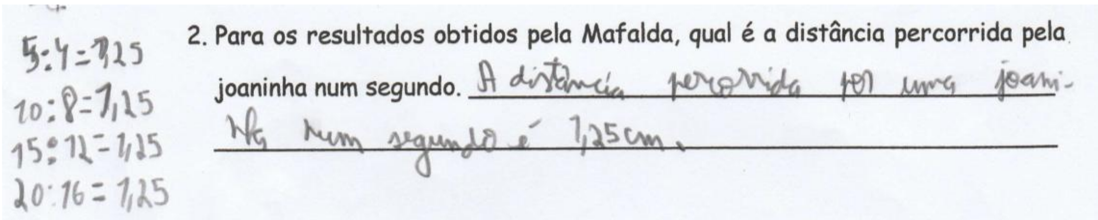
Atribuir sentido à constante de proporcionalidade

Para perceber se os alunos conseguem identificar a constante e se lhes atribuem um significado em contexto foi necessário analisar conjuntamente as respostas dadas pelos mesmos às questões 1, 2 e 4.

Quadro 27 – *Atribuir sentido à constante de proporcionalidade*

Questões 1, 2 e 4 da tarefa 7

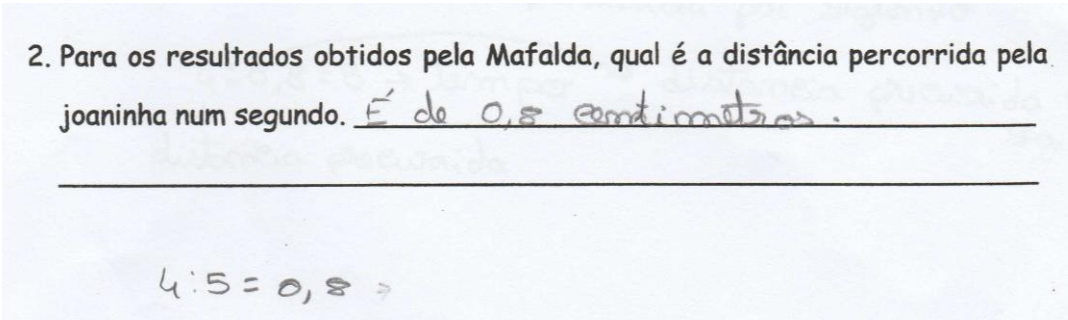
Sílvia	Filipa	Guilherme	Afonso	Filomena
_____	Identifica a Constante (IC)	Identifica o Inverso da Constante (IIC)	Identifica o Inverso da Constante (IIC)	Identifica a Constante (IC)
_____	Atribui significado em Contexto (ASC)	______	________	Atribui significado em Contexto (ASC)



5:4=1,25
10:8=1,25
15:12=1,25
20:16=1,25

2. Para os resultados obtidos pela Mafalda, qual é a distância percorrida pela joaninha num segundo. A distância percorrida por uma joaninha num segundo é 1,25cm.

Figura 45 – Resolução apresentada pelo Afonso à questão 2 da Tarefa 7

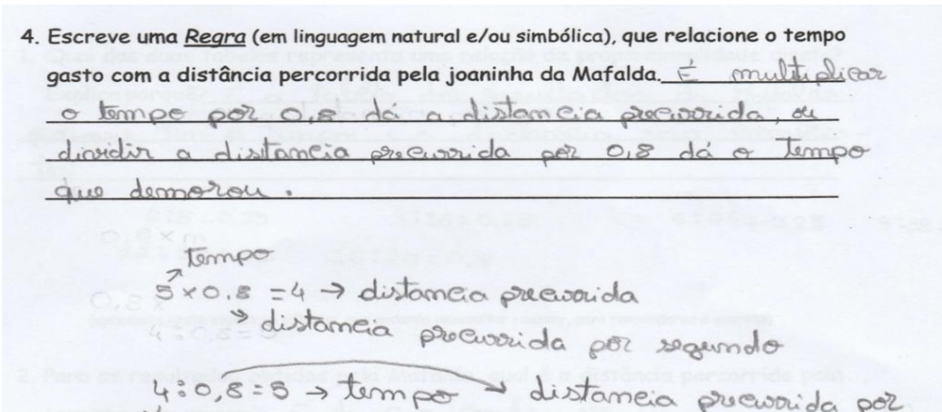


2. Para os resultados obtidos pela Mafalda, qual é a distância percorrida pela joaninha num segundo. É de 0,8 centímetros.

4:5=0,8

Figura 46 – Resolução apresentada pela Filomena à questão 2 da Tarefa 7

O Afonso e o Guilherme encontram o inverso da constante de proporcionalidade, calculando a razão entre o tempo e a distância percorrida, e não lhe atribuem o significado correto de acordo com o contexto da situação. A Filipa e a Filomena conseguem não só identificar a constante de proporcionalidade como também lhe atribuem o significado adequado ao contexto do problema. Isto pode verificar-se, por exemplo, na resolução da Filomena da questão 4, na figura seguinte, em que a aluna explicita claramente não só o significado da constante de proporcionalidade e também do seu inverso.



4. Escreve uma *Regra* (em linguagem natural e/ou simbólica), que relacione o tempo gasto com a distância percorrida pela joaninha da Mafalda. É multiplicar o tempo por 0,8 dá a distancia precorrida, ou dividir a distancia precorrida por 0,8 dá o tempo que demorou.

tempo
5×0.8=4 → distancia precorrida
→ distancia precorrida por segundo
4:0,8=5 → tempo → distancia precorrida por segundo.
distancia precorrida

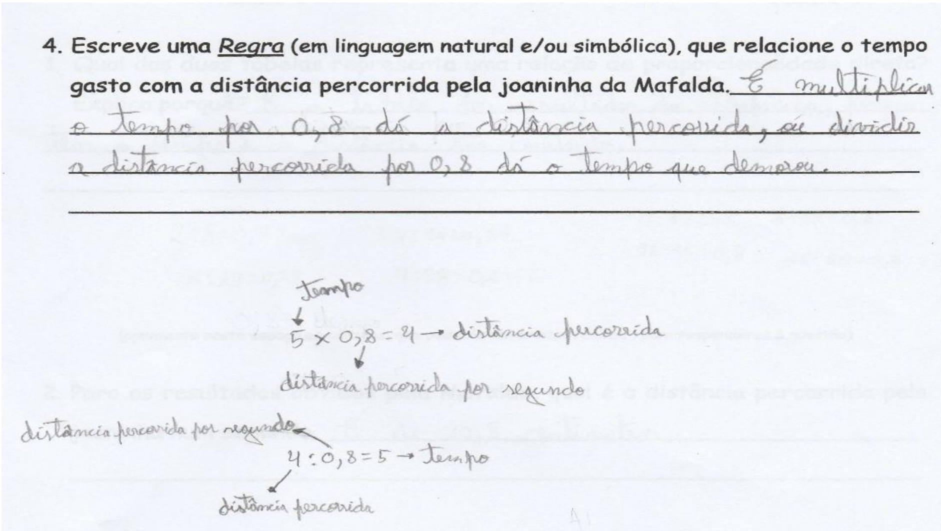
Figura 47 – Resolução apresentada pela Filomena à questão 4 da Tarefa 7

Estratégias e Representações

Na questão 4 era pedida uma regra geral para a relação entre as duas variáveis.

Quadro 28 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 4 da tarefa 7

Sílvia	Filipa	Guilherme	Afonso	Filomena
Resposta Incorreta	Regra Geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Resposta Incorreta	Regra Geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra Geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)


4. Escreve uma *Regra* (em linguagem natural e/ou simbólica), que relacione o tempo gasto com a distância percorrida pela joaninha da Mafalda. É multiplicar o tempo por 0,8 dá a distância percorrida, ou dividir a distância percorrida por 0,8 dá o tempo que demorou.

tempo

$5 \times 0{,}8 = 4 \rightarrow$ distância percorrida

distância percorrida por segundo

distância percorrida por segundo

$4 : 0{,}8 = 5 \rightarrow$ tempo

distância percorrida

Figura 48 – Resolução apresentada pela Filipa à questão 4 da Tarefa 7

Os alunos que responderam corretamente à questão 4 conseguiram encontrar uma regra explicitando-a de forma natural ou até simbolicamente chegando à expressão geradora. A Filipa, o Guilherme e o Afonso usam o contexto numérico para obter uma regra geral recorrendo ao raciocínio funcional para traduzir a regra geral.

No caso da Filipa para além de apresentar a regra em linguagem natural, a aluna vai ilustrar a relação entre as duas grandezas num caso particular, assinalando a constante de proporcionalidade como sendo a distância percorrida por segundo. A aluna evidencia compreender que pode obter a distância percorrida a partir do tempo, assim como, o tempo a partir da distância percorrida

Relativamente ao tipo de representações utilizadas nesta questão, observa-se que:

Quadro 29 – Representações utilizadas na questão 4 da Tarefa 7

Sílvia	Filipa	Guilherme	Afonso	Filomena
Linguagem simbólica alfanumérica	Linguagem natural	Linguagem simbólica	Linguagem Pré-simbólica sincopada	Linguagem natural

A Filomena e a Filipa utilizam a linguagem natural para descrever a regra geral, apresentando também exemplos de como relacionar o tempo, a distância percorrida e a distância percorrida por segundo, recorrendo à multiplicação e à divisão. Assim, a regra geral aparece escrita como uma expressão numérica, onde é feita uma legenda, explicitando o significado dos valores.

5.6. Tarefa 8 – *Telefonicamente falando…*

A aula

Com esta tarefa (anexo 4) pretendia-se mais uma vez que os alunos distinguissem uma relação de proporcionalidade direta de outra que não o é, investigando as relações numéricas que envolvem duas situações que apresentam o mesmo contexto e reconhecessem a relação de covariação e invariância que envolve a relação de proporcionalidade direta, evidenciando a natureza multiplicativa. Foi introduzido o termo "expressão geradora", tendo sido pedido aos alunos a determinação para os dois casos presentes na tarefa (Tarifário Sol e Tarifário Lua).

Tal como referi relativamente à tarefa anterior, o início desta aula de 100 minutos foi dedicado à síntese da Tarefa 7. Durante a resolução das tarefas pelos alunos, com o objetivo de promover a linguagem simbólica, sugeri à turma que simplificasse ainda mais a escrita da regra geral, e surgiu a letra *n* ou *x*, como abreviatura da palavra ou número. Solicitei aos alunos que utilizassem essas letras na escrita da regra geral das duas sequência numéricas, a exemplo do que alguns alunos já tinham começado a fazer, de um modo informal em tarefas anteriores. Destaquei a diferença entre esta expressão matemática e as expressões numéricas, por conter também letras e daí se denominar expressão algébrica. Através de outros exemplos alertei para os benefícios de uma regra geral, pois permite calcular qualquer valor da sequência.

Nesta tarefa pretendia-se que os alunos verificassem a existência de Proporcionalidade Direta em duas situações. Apresentava cinco questões e a que levantou mais dificuldade para os alunos foi a 2. Era uma questão de valor omisso onde se solicitava a determinação de um valor comum aos dois tarifários. Assim, sugeri aos alunos que resolvessem as outras questões e que no final voltassem à questão 2. Esta orientação permitiu que dois desses alunos utilizassem as expressões geradoras que encontraram para responderem a essa questão.

Na questão 1, todos os alunos preencheram corretamente as duas tabelas de Tarifários, sem revelarem grandes dificuldades. A dificuldade surgida apenas estava relacionada com a representação numérica de 6 cêntimos. Depois de esclarecidos facilmente preencheram as tabelas, com auxílio da máquina de calcular. Os alunos utilizaram a calculadora para realizar os cálculos durante esta fase exploratória o que permitiu que a sua atenção estivesse focada na relação multiplicativa e não nos algoritmos.

A questão 5 apelava à identificação de um tarifário onde existisse uma relação de proporcionalidade direta, e de outro onde não existisse. Após a exploração das relações numéricas efetuadas nas questões anteriores que envolveram duas situações com o mesmo contexto, foi fácil concluir que o tarifário Sol apresentava uma relação de proporcionalidade direta.

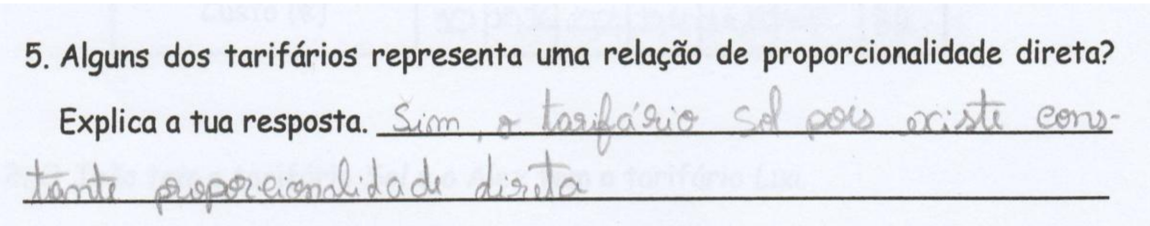
Distinguir uma situação de proporcionalidade direta de não direta

Quadro 30 – Distinguir uma situação de proporcionalidade direta de não direta

Questão 5 da tarefa 8

Sílvia	**Filipa**	**Guilherme**	**Afonso**	**Filomena**
Sim (S)	Sim (S)	Não concretiza	Sim (S)	Sim (S)

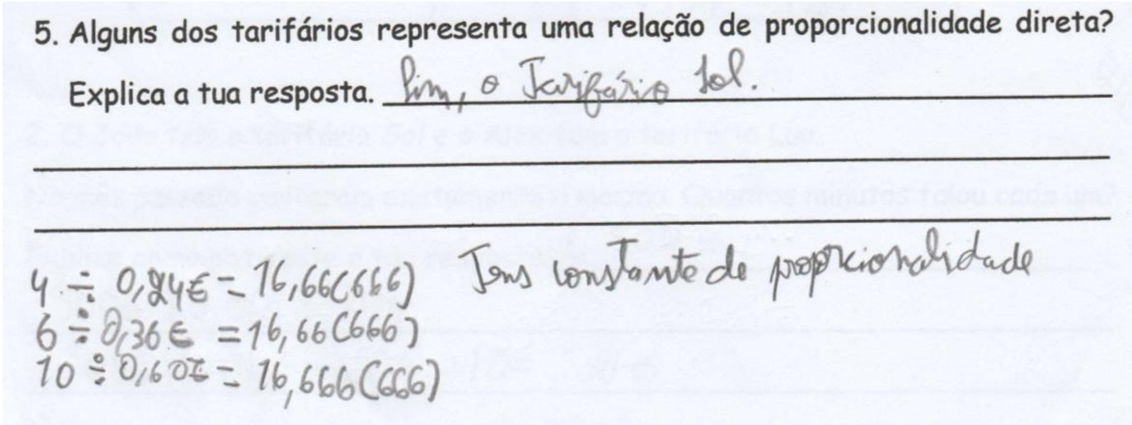
Todos os alunos responderam que havia um tarifário onde se verificava uma relação de proporcionalidade direta, no entanto apenas quatro dos cinco alunos referiram que o tarifário Sol envolve uma relação de proporcionalidade direta, justificando com a existência de uma Constante de Proporcionalidade. O Guilherme não justifica nem indica qual o tarifário, apenas responde que "Sim".


5. Alguns dos tarifários representa uma relação de proporcionalidade direta?

Explica a tua resposta. Sim, o tarifário Sol pois existe cons-
tante proporcionalidade direta

Figura 49 – Resolução apresentada pela Filomena à questão 5 da Tarefa 8

O Afonso, curiosamente, responde corretamente à questão 3, onde se pretendia que encontrassem uma Expressão Geradora que traduzisse o Tarifário Sol, a relação entre o preço a pagar em qualquer tempo utilizado, indicando 0,06xn. Na questão 5, responde corretamente, indicando que é no Tarifário Sol que se verifica uma situação de Proporcionalidade Direta, mas efetua cálculos onde reflete que se baseou no Inverso da Constante.



5. Alguns dos tarifários representa uma relação de proporcionalidade direta?

Explica a tua resposta. Sim, o Tarifário Sol.

4 ÷ 0,24€ = 16,66(666) Tem constante de proporcionalidade
6 ÷ 0,36€ = 16,66(666)
10 ÷ 0,60€ = 16,666(666)

Figura 50 – Resolução apresentada pelo Afonso à questão 5 da Tarefa 8

Atribuir sentido à constante de proporcionalidade

Na questão 3 pretendia-se que os alunos registassem uma expressão geradora que permitisse calcular qualquer preço independentemente do tempo gasto no tarifário Sol.

3. Será possível, para o tarifário Sol, escrever uma Expressão Geradora que permita determinar o preço a pagar em qualquer tempo utilizado nas chamadas? Indica-a.

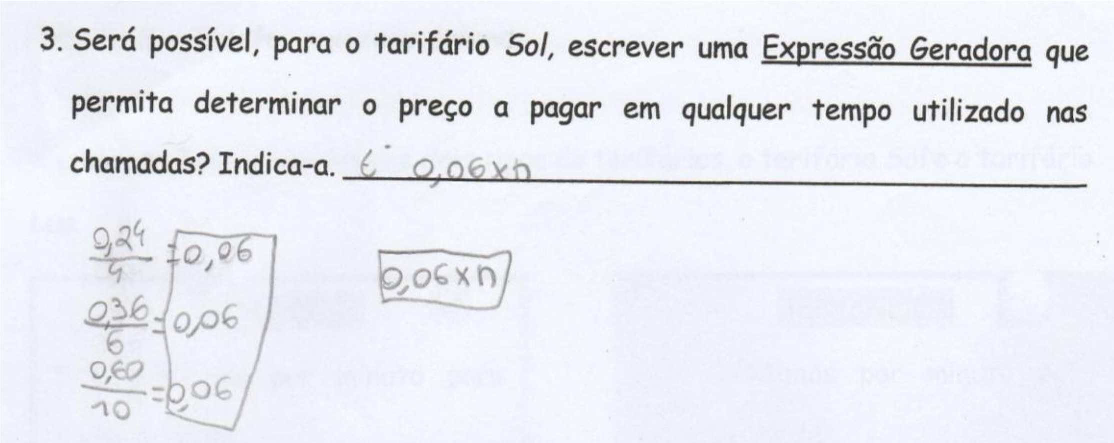
Figura 51 – Questão 3 da Tarefa 8

Quadro 31 – *Atribuir sentido à constante de proporcionalidade*

Questão 3 da tarefa 8

Sílvia	Filipa	Guilherme	Afonso	Filomena
Identifica a Constante (IC)	Identifica a Constante (IC)	Identifica a Constante (IC)	Identifica a Constante (IC)	Identifica a Constante (IC)
Atribui significado em Contexto (ASC)	Atribui significado em Contexto (ASC)	Atribui significado em Contexto (ASC)	Atribui significado em Contexto (ASC)	Atribui significado em Contexto (ASC)

Todos os alunos, à exceção da Sílvia, responderam corretamente a estas duas questões. A aluna responde incorretamente à questão 4, pois apesar de reconhecer que era necessário existir uma constante de proporcionalidade, não a encontrou, concluindo que não seria possível escrever uma Expressão Geradora para o tarifário Lua.



3. Será possível, para o tarifário *Sol*, escrever uma Expressão Geradora que permita determinar o preço a pagar em qualquer tempo utilizado nas chamadas? Indica-a. 0,06xn

$\frac{0,24}{4}=0,06$

$\frac{0,36}{6}=0,06$

$\frac{0,60}{10}=0,06$

$\boxed{0,06\times n}$

Figura 52 – Resolução apresentada pela Sílvia à questão 3 da Tarefa 8

Estratégias e Representações

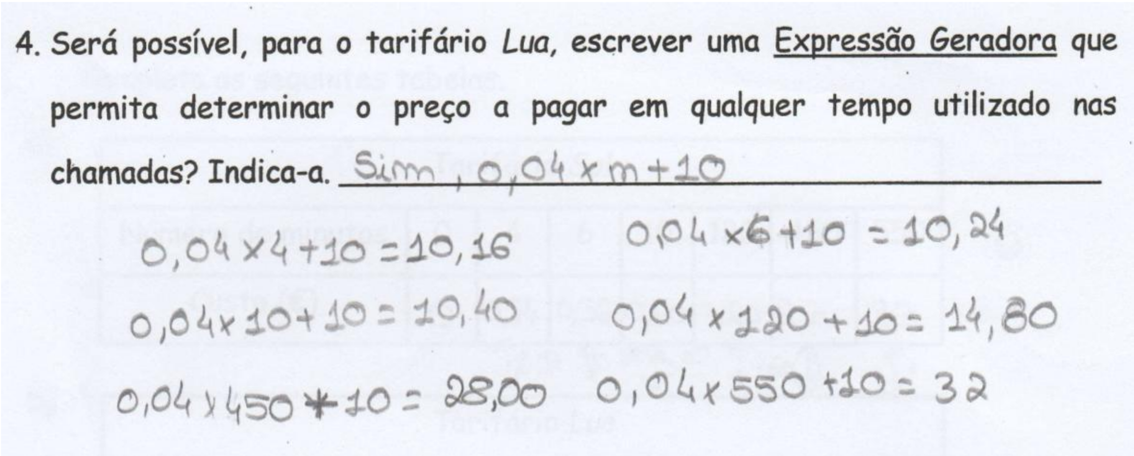
Relativamente às estratégias de generalização utilizadas pelos alunos nas questões 3 e 4, concluiu-se que todos, à exceção da Sílvia na questão 4, utilizam o contexto numérico para obter uma regra geral – Expressão Geradora - (EFCN).

Quadro 32 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 3 da tarefa 8

Sílvia	Filipa	Guilherme	Afonso	Filomena
Regra Geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra Geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra Geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra Geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra Geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)

Quadro 33 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 4 da tarefa 8

Sílvia	Filipa	Guilherme	Afonso	Filomena
Resposta Incorreta	Regra Geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra Geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra Geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra Geral Explícita – Raciocínio Funcional (EFCN)


4. Será possível, para o tarifário *Lua*, escrever uma Expressão Geradora que permita determinar o preço a pagar em qualquer tempo utilizado nas chamadas? Indica-a. Sim, 0,04 × m + 10

0,04 × 4 + 10 = 10,16

0,04 × 6 + 10 = 10,24

0,04 × 10 + 10 = 10,40

0,04 × 120 + 10 = 14,80

0,04 × 450 + 10 = 28,00

0,04 × 550 + 10 = 32

Figura 53 – Resolução apresentada pela Filomena à questão 4 da Tarefa

Relativamente ao tipo de representações utilizadas nas questões 3 e 4, observa-se que:

Quadro 34 – Representações utilizadas na questão 4 da Tarefa 8

Sílvia	Filipa	Guilherme	Afonso	Filomena
Linguagem simbólica alfanumérica	Linguagem simbólica alfanumérica	Linguagem pré-simbólica sincopada	Linguagem simbólica alfanumérica	Linguagem simbólica alfanumérica

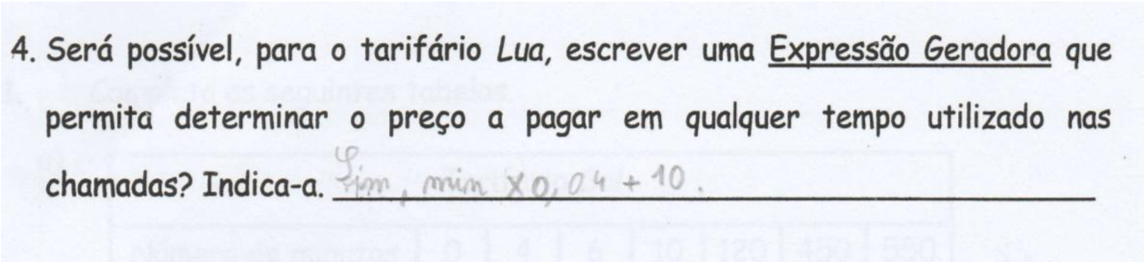

4. Será possível, para o tarifário *Lua*, escrever uma <u>Expressão Geradora</u> que permita determinar o preço a pagar em qualquer tempo utilizado nas chamadas? Indica-a. Sim, min x 0,04 + 10.

Figura 54 – Resolução apresentada pelo Guilherme à questão 4 da Tarefa 8

Para descrever a regra geral – expressão geradora – quatro alunos utilizam uma linguagem simbólica – alfanumérica, que aparece assim escrita como uma expressão algébrica. Apenas o Guilherme recorre à linguagem pré-simbólica sincopada utilizando a abreviatura “min”.

Capítulo 6

Reflexão sobre o trabalho realizado

Neste capítulo começo por apresentar uma síntese do estudo e, de seguida, analiso os seus principais resultados tendo em consideração as questões do estudo. Por fim faço uma reflexão pessoal acerca do significado deste estudo para mim, enquanto professora e investigadora, e analiso os possíveis contributos desta investigação para o meu desenvolvimento profissional.

6.1. Síntese do estudo

O presente estudo foi desenvolvido no âmbito da lecionação de dois subdomínios do Programa de Matemática Ensino Básico (MEC, 2013) – *Sequências e Regularidades* e *Proporcionalidade direta,* numa turma de sexto ano. As aulas que constituíram a unidade de ensino decorreram no segundo período do ano letivo de 2014/2015. Este estudo tem como principal objetivo compreender como esta unidade de ensino contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos de uma turma do 6.º ano, considerando as estratégias de generalização usadas e o raciocínio proporcional. Para atingir este objetivo, delinearam-se questões de estudo, organizadas segundo os contextos das tarefas propostas na unidade de ensino. Assim, no contexto da realização de tarefas com sequências crescentes pictóricas, procura-se perceber que estratégias de generalização recorrem os alunos na resolução das tarefas e como exprimem os alunos a generalização, nesse contexto. No contexto da realização de tarefas envolvendo a proporcionalidade direta pretende-se compreender como distinguem os alunos as situações de proporcionalidade direta das que não são, que sentido atribuem à constante de proporcionalidade, como exprimem a generalização, nesse contexto e, que reflexos do trabalho em torno das sequências pictóricas crescentes se evidenciam.

6.2. Principais conclusões

Neste ponto procura-se dar resposta às questões que nortearam o estudo realizado numa turma do 6.º ano integradas nos subdomínios Sequências e Regularidades e Proporcionalidade Direta. No contexto da realização de tarefas com sequências crescentes pictóricas (tarefas 2, 3 e 4), os resultados incidem sobre as estratégias e representações associadas à generalização de relações. No contexto da realização das tarefas selecionadas para a análise envolvendo a proporcionalidade direta (tarefas 5, 7 e 8), os resultados incidem não só sobre estratégias e representações associadas à generalização de relações, como também, sobre a distinção entre as situações de proporcionalidade direta e as que não o são, e o atribuir sentido à constante de proporcionalidade no contexto. A análise das estratégias e generalizações, será feita considerando as questões das seis tarefas. A discussão sobre as dificuldades evidenciadas pelos alunos na resolução das tarefas será integrada em cada uma das respetivas temáticas referidas. Procura-se também evidenciar a evolução dos alunos ao longo da experiência de ensino nos aspetos em estudo, por isso, começa-se por sintetizar os resultados relativos a cada aluno individualmente e, em seguida, discutem-se os resultados de uma forma global.

6.2.1. Estratégias de generalização em tarefas com sequências crescentes pictóricas e de proporcionalidade direta

No conjunto das tarefas onde se pretende a determinação de termos próximos ou distantes de uma sequência pictórica crescente, a Sílvia evidencia, nas primeiras três, alguma preferência pela utilização de duas estratégias: a Recursiva (D_1) e Raciocínio Funcional (FCN), de acordo com o que a situação exige. Quando se lhe pede para encontrar uma regra geral explícita, a aluna mobiliza, com sucesso, a estratégia Raciocínio Funcional, apoiada no contexto numérico da sequência (EFCN) e Recursiva (D_1). A partir da Tarefa 5 a aluna revela por vezes dificuldade em encontrar uma regra geral que reflita a expressão geradora no contexto das tarefas. No entanto, na maioria das vezes consegue escrever uma expressão geradora com os dados que considera na situação.

A Filipa usa nas tarefas 3 e 4 estratégias muito semelhantes às da Sílvia, mas na tarefa 2 apresenta um raciocínio funcional apoiado no contexto da figura (EFCF) para determinar a regra geral para as sequências. A partir da Tarefa 5 a aluna recorre, com sucesso, a estratégias funcionais a partir da observação de regularidades numéricas que surgem nas tarefas e que lhe permitem determinar termos próximos e distantes (FCN) e que estende, com facilidade, às situações em que lhe é pedida a regra geral (EFCN).

O aluno Guilherme, nas tarefas que envolvem sequências numéricas, usa a estratégia Recursiva (D_1) e Raciocínio Funcional (FCN) na determinação de termos próximos ou distantes. O aluno, tal como a Sílvia e a Filipa, mobiliza, com sucesso, a estratégia Raciocínio Funcional (EFCN) e Recursiva (D_1) para encontrar uma regra geral explícita. Nas Tarefas 5, 7 e 8 utiliza o mesmo tipo de estratégia apesar de na tarefa 7, dar uma resposta incorreta, não encontrando a expressão geradora que refletisse a situação de proporcionalidade direta, embora o tenha conseguido fazer na tarefa 5.

O Afonso apresenta nas sequências, o mesmo tipo de estratégia de generalização para termos distantes e para a determinação da regra geral, que a Filipa. Estes dois alunos, o Afonso e a Filipa, evidenciam, claramente, a partir da tarefa 3, que intuem a regra geral a partir da estratégia que utilizaram para fazer generalizações próximas ou distantes. Quando se encontram perante uma nova tarefa, os alunos conseguem abstrair a estrutura da sequência, já sem necessitarem de se apoiar diretamente no contexto, porque percebem que podem aplicar o tipo de estratégia que adotaram a novos casos semelhantes (quando se trata de situações de proporcionalidade direta). A partir da Tarefa 5, os alunos manifestam que perceberam bem a natureza de uma relação funcional e procuram encontrar regularidades nos números que lhes permitam obter uma expressão geradora que relacione a variável dependente com a independente. Estes alunos não revelaram dificuldades na resolução das tarefas, tendo conseguido desenvolver estratégias adequadas às situações propostas.

A Filomena apresenta algumas dificuldades na determinação da regra geral nas tarefas 2 e 3, não respondendo ao que lhe é solicitado, possivelmente porque a forma como percebe a estrutura da sequência se torna difícil de verbalizar, de uma forma genérica. No entanto, a partir da tarefa 4, a aluna recorre a estratégias funcionais a partir da observação de regularidades numéricas que surgem nas tarefas e que lhe permitem determinar termos próximos e distantes (FCN) e que estende, com facilidade, às situações em que lhe é pedida a regra geral (EFCN).

Comparativamente com os seus colegas a Sílvia tem maior dificuldade em adaptar estratégias que desenvolveu a novas situações, e em encontrar a expressão geradora de uma situação de proporcionalidade direta. Esta é a aluna que demonstrou mais dificuldades em resolver as tarefas desta unidade de ensino. Em sentido inverso, o Afonso e o Guilherme foram os alunos que apresentaram menores dificuldades.

Nas questões que dizem respeito à determinação da ordem de um termo dado ou da verificação se um dado valor é termo da sequência, questões habitualmente designadas de Raciocínio Inverso**,** verifica-se que a estratégia que é mais usada pelos alunos é a de Exclusão - Características dos números (ECN) que se revela eficaz e aparentemente é mais fácil para os alunos do que a estratégia Explícita através de Operações inversas (EOI). Esta é usada apenas por um aluno na tarefa 2 e 3. Verifica-se também que na tarefa 2 os outros quatro alunos usam todos a mesma estratégia (ECN). Esta opção parece decorrer de uma identificação de uma estratégia eficaz que é adequada à situação, em particular, atendendo às características dos números envolvidos. O mesmo não se verifica na tarefa 3. Dos cinco alunos, apenas três responderam e apresentam estratégias distintas. A Filipa apoia-se na diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, fazendo um ajuste no resultado – Múltiplo da Diferença com Ajuste (D3), o Guilherme utiliza uma estratégia explícita por exaustão a partir de uma regra (EE). Este aluno usa uma regra geral que lhe permite o cálculo do valor da variável dependente conhecendo a variável independente e, por exaustão, verifica se um valor é termo da sequência. Por último, o Afonso utiliza numa estratégia explícita, mas baseia-se na operação inversa para verificar se um valor é termo da sequência.

Globalmente, verifica-se que os alunos foram bem sucedidos na resolução das tarefas propostas, sendo que apenas a Sílvia não conseguiu responder de forma adequada a todas as questões das seis tarefas analisadas. Ao longo da realização das tarefas da unidade de ensino, os alunos, de uma forma geral, utilizam inicialmente estratégias do tipo Recursivo, em questões de generalização próxima, mas rapidamente evoluem para estratégias de tipo Funcional para obterem uma regra geral que lhes permite resolver as várias situações.

6.2.2. Situações de Proporcionalidade Direta - Constante de Proporcionalidade

Apenas as tarefas 5, 7 e 8 envolvem situações de proporcionalidade direta pelo que só é possível responder às questões "Como distinguem os alunos as situações de proporcionalidade direta das que não são?" e "Que sentido atribuem os alunos à constante de proporcionalidade?" tendo por base as resoluções dos alunos nestas mesmas tarefas.

De uma forma global todos os alunos, exceto a Sílvia, conseguiram distinguir situações de proporcionalidade direta das que não são. Esta aluna apenas na tarefa 8 distingue corretamente os dois tipos de situação.

Relativamente ao facto de identificarem corretamente a constante de proporcionalidade e atribuir-lhe significado verifica-se na tarefa 5 que todos os alunos identificam a constante corretamente, mas o Guilherme e a Sílvia dão respostas incompletas sem informação suficiente para que se consiga perceber se atribuem sentido ou não à constante que identificaram. Na tarefa 7, estes dois alunos continuam a não evidenciar uma atribuição de significado à constante. Além disso, o Afonso e o Guilherme identificam o inverso da constante mas aparentam não lhe atribuir significado no contexto do problema. Já na tarefa 8 todos os alunos conseguem não só identificar a constante de proporcionalidade, como atribuem-lhe significado de acordo com o contexto.

Globalmente, os alunos identificam sem grandes dificuldades a constante de proporcionalidade. No entanto, a compreensão do significado que esta tem no contexto do problema é algo que se revela mais difícil para os alunos e que só conseguem atingir plenamente na última tarefa. É de destacar que diversos alunos fazem alguma confusão entre a constante e o seu inverso, o que lhes dificulta a compreensão do seu significado de forma contextualizada.

6.2.3. Representações usadas pelos alunos

Nas várias tarefas propostas na Unidade de Ensino, foram identificadas as representações que os alunos usaram quando eram desafiados a escrever uma regra ou uma expressão geradora, permitindo assim perceber como evoluem na linguagem que utilizam. Assim, na tarefa 2 predominam as representações da regra em linguagem natural em que apenas a Sílvia a complementa com representações numéricas. Na tarefa 3 dois alunos, a Sílvia e o Afonso, utilizam a linguagem simbólica alfanumérica. No caso dos outros alunos começa a emergir uma linguagem pré-simbólica em que usam uma linguagem sincopada em que incorporam símbolos próprios. Também nesta tarefa, destaca-se o Afonso que, além de utilizar a linguagem simbólica alfanumérica, sente necessidade de a complementar com linguagem natural, possivelmente porque ainda se sente pouco seguro com esse novo tipo de representação. Apenas a Filipa usa apenas a linguagem natural.

Na tarefa 4 todos os alunos utilizam a linguagem simbólica alfanumérica. Inclusivamente a Filomena que não tinha encontrado a expressão geradora nas tarefas anteriores, apresenta-a pela primeira vez, nesta tarefa, em linguagem simbólica alfanumérica. Na tarefa 5, que faz a transição entre as sequências e regularidades e a proporcionalidade direta, é curioso perceber que por se tratar de uma situação diferente da tarefa 4 (sequência pictórica crescente), os alunos voltam a apresentar a regra recorrendo à linguagem natural ou sob a forma de uma fórmula, mas que congrega a linguagem simbólica para a variável independente na representação da expressão geradora e a linguagem pré-simbólica sincopada. O uso destas fórmulas, em que surgem os dois tipos de linguagem, constitui uma etapa para que possam começar a considerar dois símbolos numa mesma expressão, representando cada uma das variáveis.

A exclusividade do uso de linguagem simbólica alfanumérica apenas surge na resolução de todos os alunos, na última tarefa – tarefa 8. O Afonso, o Guilherme e a Sílvia são os alunos que revelam uma boa compreensão das duas variáveis envolvidas nas situações, pois a linguagem simbólica alfanumérica, no caso da Sílvia e do Afonso, e pré-simbólica, no caso do Guilherme, começa a ser utilizada já na tarefa 3. A Filomena é a única aluna que apenas utiliza a linguagem natural nas tarefas 5 e 7, onde se observavam situações de proporcionalidade direta mas já recorre à linguagem simbólica na última tarefa.

Os alunos vão gradualmente usando uma linguagem mais formal. Iniciam com uma linguagem natural até à simbólica alfanumérica. No entanto, verifica-se que, em algumas tarefas, voltam a usar linguagem natural quando já tinham usado linguagem pré-simbólica ou, até mesmo, simbólica em tarefas anteriores, o que se depreende decorrer com o grau de dificuldade ou da familiaridade e confiança do aluno com a estratégia adotada. Assim, por exemplo, a Filomena utiliza linguagem simbólica, quando resolve a tarefa 4, mas nas tarefas 5, 7 exprime a expressão geradora através de linguagem natural. Também a Filipa e a Filomena recorrem novamente à linguagem natural nas Tarefa 5 e 7, quando na tarefa 4 já tinham recorrido à linguagem simbólica alfanumérica e só na tarefa 8 voltam a utilizar este tipo de linguagem. Possivelmente, a dificuldade das alunas em escreverem a expressão geradora em linguagem simbólica, decorre do facto de que na tarefa 4 estas poderem apoiar-se no contexto das figuras para dar sentido aos símbolos, mas no caso da Tarefa 8 apenas se poderiam centrar nos números. Portanto, este aparente avançar e recuar das alunas na utilização da linguagem simbólica tem de ser entendido à luz das situações que são propostas. Ao invés, o Afonso, o Guilherme e a Sílvia progridem de forma gradual e sem retrocessos na utilização da linguagem simbólica, ao longo da unidade de ensino. Na primeira tarefa usam linguagem natural, mas na segunda já usam a linguagem simbólica alfanumérica e linguagem sincopada (pré-simbólica). Na terceira tarefa todos representam a expressão geradora de forma simbólica alfanumérica, e a partir da tarefa 4 usam sempre linguagens simbólica e pré-simbólica para representar uma fórmula com as duas variáveis.

6.2.4. Reflexos do trabalho em torno das sequências pictóricas crescentes que se evidenciam em situações de proporcionalidade direta

Analisando os resultados deste estudo conclui-se que as tarefas com sequências pictóricas propostas constituíram um importante apoio à generalização. Na maioria destas tarefas, todos os alunos conseguiram chegar a uma regra geral explícita para a sequência proposta. Essas aprendizagens foram depois transpostas para as tarefas envolvendo proporcionalidade direta.

Os contextos das figuras mostraram-se fundamentais para ajudar os alunos a usar linguagem pré-simbólica e, gradualmente, a simbólica, ajudando a dar sentido às duas variáveis. Esta conclusão vai ao encontro dos estudos de Barbosa (2013) mas nos estudos de Pedro (2013), a visualização não é um elemento central no processo de generalização desde o início, talvez pelo facto de as primeiras tarefas terem sido resolvidas pelos alunos com recurso ao Excel. Esta última autora refere também que os alunos ao transitarem de tarefas de sequências pictóricas para as de proporcionalidade direta, continuam a desenvolver raciocínios funcionais, apoiados nas relações numéricas, e recorrem à linguagem simbólica que desenvolveram nas tarefas anteriores, o que se verificou também no presente estudo. Tal como no estudo de Barbosa (2013), o presente trabalho evidencia que resolver tarefas de exploração baseadas na descoberta de sequências pictóricas, seguindo-se momentos de discussão em turma, contribuiu para que os alunos o desenvolvessem a sua capacidade de generalização. Quando os alunos transitam das tarefas de sequência pictórica para as tarefas que apresentam situações de proporcionalidade direta estes conseguem utilizar raciocínios funcionais, apoiados nas relações numéricas presentes, recorrendo também à linguagem simbólica que desenvolveram nas tarefas anteriores. Como tal revelam desembaraço na capacidade de generalizar, de utilizar linguagem simbólica e de determinar a constante de proporcionalidade. Relativamente ao significado da constante de proporcionalidade os alunos revelam mais dificuldade em lhe atribuir um significado em contexto, referindo-se, por vezes, ao inverso da constante como sendo a própria constante. É evidente que os alunos sabem que têm de efetuar o quociente entre as duas grandezas para obter a constante mas não cuidadosos relativamente à ordem pela qual esse quociente deve ser efetuado. Surge assim a necessidade de se aprofundar este conteúdo no sentido de clarificar as diferenças existentes em contexto, entre a constante e o seu inverso.

Os conteúdos Sequências e Regularidades e Proporcionalidade Direta foram objeto de análise cuidada tendo por base os documentos orientadores do Ministério da Educação. Estes definem pontos fundamentais relativos ao desenvolvimento do pensamento algébrico, dando especial atenção à generalização e representações, como também ao desenvolvimento do raciocínio proporcional, nomeadamente situações de proporcionalidade direta e o significado da constante de proporcionalidade. A abordagem adotada nesta Unidade de Ensino permitiu que os alunos trabalhassem de uma forma mais integrada dois tópicos que habitualmente são apresentados separadamente. Esta abordagem contribui para que os alunos estabeleçam conexões entre diferentes temas do programa e desenvolvam uma perspetiva mais articulada da Matemática e que não a vejam como um somatório de temas. Este trabalho também constitui uma contribuição para que os alunos comecem a desenvolver o seu raciocínio funcional, assunto fundamental na aprendizagem da Matemática, assim como as bases para o uso da linguagem algébrica simbólica, para além da capacidade de generalização, desenvolvendo assim o seu pensamento algébrico.

6.3. Reflexão Final

A coerência das tarefas desenvolvidas nesta Unidade de Ensino, relativamente à sua conceção, sequência e duração, terá sido importante para promover eficazmente o desenvolvimento do pensamento algébrico e o raciocínio proporcional nos alunos. Assim, o presente estudo mostrou que estes têm capacidade de resolver certos tipos de problemas que envolvem o raciocínio proporcional, ainda antes do ensino formal deste conteúdo, ou seja, não precisam da aprendizagem formal para realizar algumas das tarefas. Daí ser muito importante permitir que os alunos partilhem na sala de aula aquilo que já conhecem intuitivamente e que deve servir de ponto de partida para as aprendizagens mais formais.

O estudo que realizei contribuiu não só para melhorar o conhecimento e aprendizagem dos alunos, ajudando-os a superar algumas das dificuldades reveladas e o modo como encaram e resolvem as tarefas que envolvem estes conceitos, como também constituiu um importante e relevante momento de aprendizagem para a mim própria, não só enquanto investigadora mas também, e essencialmente, como professora. Enquanto investigadora pude observar e experimentar todos os momentos, etapas e dificuldades inerentes à realização de um estudo/investigação desta natureza, o que me ajudou a dar resposta às questões inicialmente colocadas para poder perceber melhor as dificuldades dos alunos e encontrar um meio de os ajudar a superá-las. Em todo o meu percurso profissional, tenho tido o cuidado de renovar e aprofundar o meu conhecimento profissional, no sentido da minha intervenção poder melhorar as potencialidades dos meus alunos, motivando-os e selecionando as estratégias e as metodologias adequadas. Ao realizar este estudo foi possível compreender como elaborar um plano de investigação, analisar a literatura existente, organizar a metodologia de investigação, definindo instrumentos de recolha e análise de dados, de acordo com os objetivos do estudo. Também foi possível compreender os processos de análise de dados e sua utilidade para a elaboração das conclusões do estudo.

Na realização do presente estudo, foram-se registando algumas dificuldades. Uma dificuldade sentida diz respeito à realização do diário de bordo. Tentei fazer o registo logo após as aulas, para que refletisse o melhor possível as observações mais relevantes, mas dentro da sala de aula o meu papel de professora prevaleceu sobre o de investigadora e algumas observações e intervenções dos alunos podem-me ter escapado. Uma outra dificuldade foi durante esta experiência de ensino existiram aspetos na dinâmica da sala de aula com os quais os alunos não estavam muito familiarizados, nomeadamente o modo de exploração das tarefas, nomeadamente a resolução da tarefa ser na íntegra resolvida entre pares. O trabalho a pares só se realizava para efeitos de entreajuda entre colegas, apenas quando terminavam o seu trabalho e se o colega necessitasse de apoio. A existência de um momento de discussão conjunta em que os alunos apresentam e registam as diferentes estratégias utilizadas é algo já mais frequente. Outra questão que originou alguns problemas foi a interpretação de algumas tarefas tendo em conta a linguagem utilizada, nomeadamente, o significado de expressões como permanência e taxa de adesão.

Depois de refletir sobre o trabalho desenvolvido considero que este estudo enriqueceu, de uma forma significativa, o meu conhecimento profissional dentro da minha área científica e no âmbito da didática. Simultaneamente, proporcionou aos meus alunos uma experiência de qualidade onde as aprendizagens foram efetivas e as experiências de trabalho relevantes. Enquanto professora este estudo foi, sem dúvida, uma mais-valia, na medida em que me permitiu aprender mais e refletir de modo mais aprofundado sobre o desempenho e dificuldades dos alunos na aprendizagem da proporcionalidade direta e da constante de proporcionalidade. A realização desta investigação deu-me elementos "preciosos" para a minha prática pedagógica e suscitou a minha curiosidade e atenção para a atividade realizada pelos meus alunos. O tipo de reflexão realizada quer antes, durante e após a aplicação das tarefas, o preparar e reformular tarefas, o analisar os resultados obtidos nas várias tarefas, como também as minhas interações com os alunos, contribuíram para uma maior consciencialização e compreensão da sua aprendizagem neste subdomínio.

Referências

Arcavi, A. (2006). El desarrolo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29- 48). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Barbosa, A. (2013). O contributo da visualização no desenvolvimento do raciocínio funcional. In Atas *Seminário de Investigação em Educação Matemática 2013 – Raciocínio Matemático* (pp. 51-80). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, Covilhã.

Barbosa, A. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga.

Barbosa, E. & Borralho, A (2009). Exploração de Padrões e Pensamento Algébrico. In I. Vale & A. Barbosa (Org.) *Patterns-Multiple Perspectives and Contexts in Mathematics Education* (pp. 59-68). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo – Projecto Padrões.

Becker, J. & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 121-128). Melbourne, Australia.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Carraher, D., Schliemann, A., & Schwartz, J. (2008). Early Algebra is not the same as Algebra early. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 235–274). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), Second Handbook of Mathematics teaching and learning (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Clarke, F., & Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 41-51.

Costa, S. (2007). *O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do Ensino Básico* (dissertação de mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Cramer, K., Post, T., & Behr, M. (1989). Interpreting proportional relationships. *Mathematics Teacher*, 82(6), 445-452.

Hart, K. (1981). Ratio and proportion. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics*: 11-16 (pp. 88-101). London: John Murray.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age.

Lamon, S. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Lannin, J.K. (2004). Developing Mathematical Power by Using Explicit and Recursive Reasoning. *Mathematics Teacher*, *98* (4), 216-223.

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*. Vol. 18, (3), pp. 3-28.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Oliveira, H. (2009). A Álgebra no novo programa de Matemática do ensino básico. *Educação e Matemática, 105*, 83-86.

Oliveira, H., Menezes, L., Canavarro, A. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º Ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, 22*(2), 3 - 6.

Mateus, A. (2013). *A capacidade de generalização no estudo das funções no 8ºano* (relatório de mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino* (tese de doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2012). A co-construção da generalização nas discussões coletivas: Um estudo com uma turma do 4.º ano. *Quadrante, 21*(2), 111-138.

MEC, (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

MEC, (2012). *Metas Curriculares Ensino Básico Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

ME, (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Recuperado em Março de 2007, de http://standards.nctm.org.

Parish, L. (2010). Facilitating the Development of Proportional Reasoning through Teaching Ratio. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Pedro, I. (2013). *Das sequências à proporcionalidade direta: Uma experiência de ensino no 6.º ano de escolaridade* (relatório de mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: ME DGIDC.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Graça Martins, M. E., & Oliveira, P. A. (2007, December*). Programa de matemática do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação. Available: http://www.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2012). Proporcionalidade directa no 6.º ano de escolaridade: uma abordagem exploratória. *Interações, 20*, 70-97.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2012). An exploratory teaching unit to develop proportional reasoning. In *Pre-Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul, Korea.

Silvestre, A. (2012). *O desenvolvimento do raciocínio proporcional: percursos de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Spinillo, A. (1994) Raciocínio proporcional em crianças: Considerações acerca de alternativas de educacionais. *Pro-posições*, 5(13), 109-114.

Taylor-Cox, J. (2003). Algebra in the early years?, *Young Children*, 14-21.

Veloso, G., Brunheira, L., & Rodrigues, M. (2013). A proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico: um recuo de décadas. *Educação e Matemática, 123*, 3-8.

Anexos

Anexo 1 – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Teresa Isabel Girardo Martins Garcez, professora de matemática no Agrupamento de Escolas de ______________, na Escola E.B. 2/3 e Secundária ___________, venho, por este meio, solicitar autorização para a participação do seu educando no Trabalho de Projeto intitulado “O raciocínio proporcional no quadro do pensamento algébrico: uma experiência de ensino no 6.º ano”. Este trabalho integra-se no âmbito do Mestrado em Educação, na área de especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, que estou a desenvolver, e tem como objetivo desenvolver tarefas e estratégias de ensino que contribuam para uma melhor aprendizagem dos alunos no domínio da Proporcionalidade Direta.

A concretização do Projeto implicará a recolha de dados, na sala de aula, através de meios áudio e/ou vídeo e ocorrerá no 2.º período do presente ano letivo, em momentos em que os temas das Sequências e Regularidades e Proporcionalidade Direta estejam a ser lecionados. De modo a obter informação mais detalhada está prevista também a recolha de alguns trabalhos escritos dos alunos, assim como a realização de questionários ou entrevistas com alguns dos alunos.

Mais declaro que será preservado o anonimato dos alunos e da escola. As imagens e o som resultantes do Projeto não serão divulgados nem serão utilizados para quaisquer outros fins, senão para o trabalho académico. Deste trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, sendo garantido o cumprimento dos conteúdos programáticos e das indicações metodológicas preconizadas no programa de Matemática, do 6.º ano de escolaridade, em vigor.

Colocando-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos adicionais, despeço-me com os melhores cumprimentos, agradecendo, desde já, a sua colaboração.

______________, 11 de Dezembro de 2014

A Professora

____

(Teresa Isabel Garcez)

(Recortar por aqui) ---

Declaro que concordo que o meu educando_________________________________, n.º ____, da turma _, do 6.º ano, da Escola E.B. 2/3 e Secundária ______________, participe no Trabalho de Projeto “O raciocínio proporcional no quadro do pensamento algébrico: uma experiência de ensino no 6.º ano”, desenvolvido pela professora de matemática Teresa Isabel Garcez.

Autorizo/Não autorizo a gravação vídeo do meu educando nas aulas (riscar o que não interessa)

Data:_____________ Assinatura: ____________________________________

Anexo 2 – Pedido de autorização à Diretora do Agrupamento de Escolas

Exma. Srª. Diretora do Agrupamento de Escolas de ______________

Eu, Teresa Isabel Girardo Martins Garcez, professora do grupo 230, na Escola E.B. 2/3 e Secundária__________, venho por este meio solicitar autorização para concretizar, nesta escola, o Trabalho de Projeto intitulado "O raciocínio proporcional no quadro do pensamento algébrico: uma experiência de ensino no 6.º ano". Este Projeto integra-se no âmbito do Mestrado em Educação, na área de especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, que estou a desenvolver, com a orientação da Profª Hélia Oliveira, e tem como objetivo compreender de que modo o trabalho com situações que envolvam sequências, regularidades e proporcionalidade direta, podem contribuir para o processo de generalização através de diferentes formas de representação, assim como contribuir para o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos.

A concretização do Projeto implicará a recolha de dados, na sala de aula, através de meios áudio e/ou vídeo e ocorrerá no 2.º período do presente ano letivo, em momentos em que os temas das Sequências e Regularidades e Proporcionalidade Direta estejam a ser lecionados. De modo a obter informação mais detalhada está prevista também a recolha de alguns trabalhos escritos dos alunos, assim como a realização de questionários e entrevistas com alguns alunos.

Mais declaro que será sempre preservado o anonimato dos alunos e da escola. As imagens e o som resultantes do Projeto não serão divulgados nem serão utilizados para quaisquer outros fins, senão para o trabalho académico. Deste trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, sendo garantido o cumprimento dos conteúdos programáticos e das indicações metodológicas preconizadas no programa de Matemática, do 6.º ano de escolaridade, em vigor. Considero que, pelo contrário, a participação dos alunos no estudo, poderá revelar-se uma mais-valia para a sua aprendizagem, pois terão oportunidade para refletir acerca da sua atividade matemática.

Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e à própria escola, enquanto instituição. Os Encarregados de Educação serão informados sobre este estudo, sendo essencial o seu consentimento para possibilitar a participação dos alunos neste projeto.

Colocando-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos adicionais, despeço-me com os melhores cumprimentos, agradecendo, desde já, a sua colaboração.

_______________, 11 de Dezembro de 2014

Pede deferimento

____

(Teresa Isabel Garcez)

Anexo 3 – Diário de Bordo

Diário de Bordo

Aula:

Data:

Tarefas:

Tempo previsto/Tempo gasto:

Antes da Aula
Expectativas do professor

Durante a Aula
Introdução da tarefa
Instruções:
Reações dos alunos:
Desenvolvimento da tarefa
Atitudes do professor / Questões colocadas / Reações obtidas

Questões específicas colocadas pelos alunos
Dificuldades e comentários dos alunos
Atitudes dos alunos no desenvolvimento da tarefa / Estratégias utilizadas
Discussão Geral
Intervenções dos alunos / Gestão do professor
Principais conclusões / Aspetos novos
Outros aspetos a destacar / Episódios marcantes decorridos na sala de aula

Após a Aula
Aspetos bem conseguidos

Aspetos que podem ser melhorados (nas tarefas, na prática do professor)
Papel do professor / investigador
Reflexos na investigação

Outras Observações:

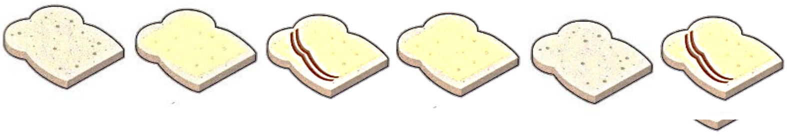
Anexo 4 – Tarefas da Unidade de Ensino

Anexo 4 – Tarefas

Tarefa 1 – Tostas em Fila

A Maria dispõe 50 tostas em fila. Em seguida, colocou queijo na 2ª tosta, na 4ª tosta, na 6ª tosta, e continuo assim até ao fim da fila, saltando sempre uma tosta.

Depois, colocou uma fatia de fiambre na 3ª tosta, na 6ª tosta, e continuou assim até ao fim, saltando sempre duas tostas.



A 1ª tosta, a 5ª tosta e mais algumas tostas ficaram sem nada por cima.

1. Que ingredientes tem a tosta que se encontra na 24ª posição? Explica o teu raciocínio.

   ____

   ____

2. A tosta na 39ª posição tem dois ingredientes? Porquê?

   ____

   ____

3. Que ingrediente (s) tem a tosta que se encontra na 50ª posição? Explica o teu raciocínio? ______________________________________

   ____

   Em que posições se encontram as tostas com queijo?____

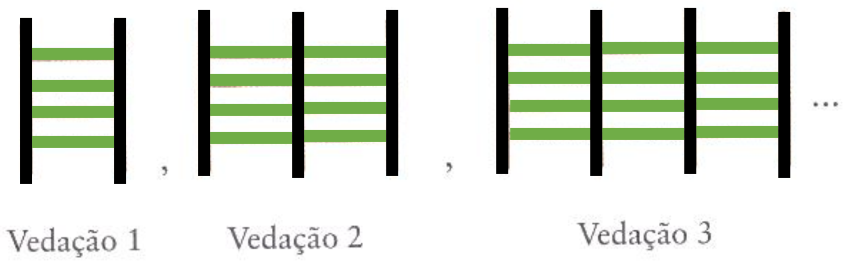
4. Em que posições se encontram as tostas com dois ingredientes?____

Adaptado da Prova de Aferição de Matemática, 2º Ciclo, 2009

Anexo 4 – Tarefas

Tarefa 2 – Pulando a Cerca

O Pedro construiu vedações de madeira de vários tamanhos, com tábuas (a verde) como vês assinaladas na figura.



Admite que o padrão se mantém para as próximas vedações.

1. Quantas tábuas (a verde), no total, são necessárias para formar a vedação de ordem 4? ______________________________________

2. Completa a tabela.

Número da vedação	Número de tábuas
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
10	

3. Pode existir uma vedação com 82 tábuas? Explica como obtiveste a tua resposta. ____

____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

4. Pode existir uma vedação com 120 tábuas? Explica como obtiveste a tua resposta. ____

____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

5. Indica uma *Regra* (em linguagem natural e/ou simbólica) que te permite determinar o número de tábuas em qualquer vedação?_____

____

____

(apresenta neste espaço os cálculos que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

Adaptado do Caderno Atividades - Matemática 6, Porto Editora

Anexo 4 – Tarefas

Tarefa 3 – Brincando com Berlindes

A Adriana formou uma sequência com berlindes, como se representa a seguir.

Admite que o padrão se mantém para as seguintes formações.

1. Quantos berlindes são necessários para a formação 6? ________________

2. Completa a tabela seguinte.

Número da formação	Número de berlindes
1	
2	
3	
4	
5	
6	
10	
15	
20	

2.1. Explica, usando palavras, como é possível saber quantos berlindes são necessários para a construção da formação 50.

____

____

3. O João, um amigo da Adriana, afirmou que existe uma formação com 201 berlindes. Concordas? Explica como obtiveste a tua resposta.

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

4. Indica uma *Regra* (em linguagem natural e/ou simbólica), que te permita determinar o número de berlindes de qualquer formação.

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

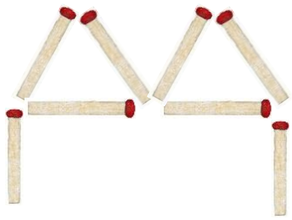
Adaptado do Caderno Atividades -Matemática 6, Porto Editora

Anexo 4 – Tarefas

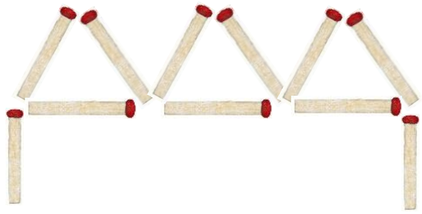
Tarefa 4 – Os Fósforos

Observa a sequência de figuras.

1



2



3

1. Desenha a figura seguinte.

2. A tabela seguinte refere-se a figuras da mesma sequência.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	10
Número de segmentos	5	8	11	?	?	?	?

a) Completa a tabela.

b) Por quantos fósforos é formada a figura 20? Explica o teu raciocínio.

____

____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

c) Por quantos fósforos é formada a figura 65? Explica o teu raciocíno.

____

____

____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

d) Indica a <u>Expressão Geradora</u> desta sequência.________________

____

____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

Anexo 4 – Tarefas

Tarefa 5 – Parques de Estacionamento

Valores pagos por clientes de dois Parques de Estacionamento, ao longo de um dia.

Parque *Carro Aqui*						
Tempo (h)	1	2	3	4	5	6
Preço (€)	2	4	6	8	10	12

Parque *Carro Acolá*						
Tempo (h)	1	2	3	4	5	6
Preço (€)	2	5	7	9	12	14

1. No Parque *Carro Aqui*, quando o tempo de permanência duplica, o que acontece ao preço a pagar? E quando o tempo triplica?________________

____

____

2. Mantinhas as respostas dadas na questão 1, se se tratasse do Parque *Carro Acolá*? Porquê? ____

____

____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

3. Consegues determinar o preço de uma hora de estacionamento no Parque *Carro Aqui*? Como? ____

____

____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

4. Para alguma das empresas é possível escrever uma *Regra* (em linguagem natural e/ou simbólica), que relacione o tempo de estacionamento com o preço a pagar?____

____

____

____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

Adaptado do Manual MSI 6, Areal Editores

Anexo 4 – Tarefas

Tarefa 6 – Na Loja de Doces

Na loja dos doces, deram à Ana uma receita de gelado para 6 pessoas.

Na tabela seguinte, estão as quantidades de cada um dos ingredientes da receita.

Receita para 6 pessoas	
Ingredientes	Quantidades
Ovos	6
Açúcar	1 Chávena
Leite em Chocolate	6 Chávenas
Baunilha	4 Colheres de café
Chocolate Preto	− Tablete

1. Constrói uma tabela, com as quantidades de ingredientes que a Ana deve usar ao fazer o gelado só para 3 pessoas.

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

2. Supõe que, para fazer o gelado vais utilizar – de tablete de chocolate preto,

   2.1. Para quantas pessoas estarias a preparar a receita de gelado?

   ____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

   2.2. Constrói uma tabela onde incluas todos os ingredientes necessários para preparar essa receita.

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

Adaptado da Prova de Aferição de Matemática, 2º Ciclo, 2007

Anexo 4 – Tarefas

Tarefa 7 – A Joaninha

A Alice esteve a estudar a velocidade de uma joaninha, e registou o que observou, na tabela 1.

A Mafalda fez o mesmo, mas com outra joaninha, e registou o que observou, na tabela 2.

Resultados da Alice				
Tempo (s)	8	16	24	38
Distância (cm)	2	4	6	9

Tabela 1

Resultados da Mafalda				
Tempo (s)	5	10	15	20
Distância (cm)	4	8	12	16

Tabela 2

1. Qual das duas tabelas representa uma relação de proporcionalidade direta? Explica porquê?____________________________________

____

____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

2. Para os resultados obtidos pela Mafalda, qual é a distância percorrida pela joaninha num segundo. ____________________________________

____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

3. Admite que a joaninha observada pela Mafalda continua a movimentar-se na mesma velocidade constante. Quanto tempo demora a percorrer 70 cm?____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

4. Escreve uma *Regra* (em linguagem natural e/ou simbólica), que relacione o tempo gasto com a distância percorrida pela joaninha da Mafalda.____________

____

____

____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

Adaptado do Caderno Atividades Matemática 6, Porto Editora

Anexo 4 – Tarefas

Tarefa 8 – Telefonicamente falando….

A empresa TrimTrim oferece dois tipos de tarifários, o tarifário *Sol* e o tarifário *Lua*.

Tarifário *Sol*

* 6 cêntimos por minuto para qualquer rede

* Sem taxa de adesão

1.
om
ple
ta

Tarifário *Lua*

* 4 cêntimos por minuto para qualquer rede

* Taxa de adesão: 10 euros

as seguintes tabelas.

a)

Tarifário *Sol*							
Número de minutos	0	4	6	10	120	450	550
Custo (€)							

b)

Tarifário *Lua*							
Número de minutos	0	4	6	10	120	450	550
Custo (€)							

2. O João tem o tarifário *Sol* e o Alex tem o tarifário *Lua*.

No mês passado gastaram exatamente o mesmo. Quantos minutos falou cada um?

Explica como obtiveste a tua resposta.______________________________

____

____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

3. Será possível, para o tarifário *Sol,* escrever uma Expressão Geradora que permita determinar o preço a pagar em qualquer tempo utilizado nas chamadas? Indica-a. ____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

4. Será possível, para o tarifário *Lua,* escrever uma Expressão Geradora que permita determinar o preço a pagar em qualquer tempo utilizado nas chamadas? Indica-a. _______________________________________

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

5. Alguns dos tarifários representa uma relação de proporcionalidade direta? Explica a tua resposta. ______________________________________

____

____

(apresenta neste espaço os cálculos, que poderás necessitar realizar, para responderes à questão)

Adaptado do Manual MSI 6, Areal Editores

Anexo 5 – Tabelas síntese dos resultados obtidos

Estratégias de generalização em tarefas com sequências crescentes pictóricas e de proporcionalidade direta

	Estratégias de Generalizações						
	Q. 5	Q.2.1	Q.4	Q. 2a	Q. 2a	Q.2c	Q. 2d
Sílvia	D1	D1	EFCN	D1	FCN	FCN	EFCN
Filipa	EFCF	FCN/D1	EFCN	D1	FCN	FCN	EFCN
Guilherme	D1	FCN	EFCN	D1	D1	FCN	EFCN
Afonso	EFCF	FCN	EFCN	D1	FCN	FCN	EFCN
Filomena	N R	D1	N R	D1	FCN	FCN	EFCN
	Tarefa 2	**Tarefa 3**		**Tarefa 4**			

	Generalizações Raciocínio Inverso	
	Q.3	Q.3
Sílvia	ECN	Resposta Errada
Filipa	ECN	D3
Guilherme	ECN	EE
Afonso	EOI	EOI
Filomena	ECN	N R
	Tarefa 2	**Tarefa 3**

	Generalizações		
	Q.4	Q.4	Q.4
Sílvia	R INCOMPLETA	R INCORRETA	R INCORRETA
Filipa	EFCN	EFCN	EFCN
Guilherme	EFCN	R INCORRETA	EFCN
Afonso	EFCN	EFCN	EFCN
Filomena	EFCN	EFCN	EFCN
	Tarefa 5	**Tarefa 7**	**Tarefa 8**

Situações de Proporcionalidade Direta

Constante de Proporcionalidade

	Distinguir Sit. PD de não Direta			**Identificar e Atribuir sentido Constante Prop.**		
	Q.2	Q.1	Q.5	Q 3 e 4	Q. 1, 2 e 4	Q.3
Sílvia	N	N	S	IC / R Incompleta	-------	IC /ASC
Filipa	S	S	S	IC /ASC	IC /ASC	Tarefa 7
Guilherme	S	S	N Concretiza	IC / Sem inf.	IIC / ----	IC /ASC
Afonso	S	S	S	IC /ASC	IIC / ----	IC /ASC
Filomena	S	S	S	IC /ASC	IC /ASC	IC /ASC
	Tarefa 5	**Tarefa 7**	**Tarefa 8**	**Tarefa 5**	**Tarefa 7**	**Tarefa 8**

Representações

	Linguagem /Representações					
	Q.5	Q.4	Q. 2d	Q.4	Q.4	Q.4
Sílvia	Natural + Numérica	Simbo /Alfan	Simbo /Alfan	R Não Adequada	Simbo /Alfan	Simbo /Alfan
Filipa	Natural + Numérica	Natural	Simbo /Alfan	Natural	Natural	Simbo /Alfan
Guilherme	Natural + Numérica	Pré – simb (sincopada)	Simbo /Alfan	Simbólica	Simbólica	Pré – simb (sincopada)
Afonso	Natural	Simbo /Alfan + Natural	Simbo /Alfan	Sincopada	Simbo /Alfan	Simbo /Alfan
Filomena	N R	N R	Simbo /Alfan	Natural	Natural	Simbo /Alfan
	Tarefa 2	**Tarefa 3**	**Tarefa 4**	**Tarefa 5**	**Tarefa 7**	**Tarefa 8**